

2.4 Darstellung beliebiger Funktionen in CAD-Systemen

Mit der Spline-Interpolation (Abschnitt 2.2) gelingt es, mit abschnittsweise gültigen Funktionen eine Punktmenge so durch eine Kurve zu verbinden, daß zwischen den Stützstellen ein weites Ausschwingen vermieden wird. Die Ausgleichsrechnung (Abschnitt 2.3) läßt ohne den Zwang, die Stützstellen tatsächlich treffen zu müssen, besonders glatte Kurven entstehen, wenn der Grad des Ausgleichspolynoms nicht zu groß gewählt wird, was dann jedoch unter Umständen mit einer schlechteren Anpassung an die Stützstellen bezahlt werden muß.

Für die Darstellung beliebiger Funktionen, die durch eine Punktmenge definiert werden, hat sich in CAD-Systemen (auch in der NC-Programmierung) eine auf den französischen Mathematiker Bézier zurückgehende Idee durchgesetzt, der für die Karosseriekonstruktion bei der Firma Renault am Anfang der 70er Jahre spezielle Spline-Kurven verwendete, die im Gegensatz zu der Spline-Interpolation, die im Abschnitt 2.2 beschrieben wurde, nicht alle Stützstellen treffen (deshalb werden für die Punkte oft auch die Ausdrücke "Kontroll"-, "Leit"- oder "Steuer"-Punkte verwendet, hier wird weiter von Stützstellen gesprochen).

Alle inzwischen gebräuchlichen Varianten dieses Verfahrens erzeugen eine durch $n + 1$ Punkte definierte Funktion als Summe sogenannter Basispolynome $\mathbf{B}_{i,m}$. Mit den Stützstellen $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), \dots, (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)$ lassen sich die Funktionen in Parameterdarstellung folgendermaßen formulieren:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \mathbf{B}_{0,m}(t) + x_1 \mathbf{B}_{1,m}(t) + \dots + x_n \mathbf{B}_{n,m}(t) \quad , \\ y(t) &= y_0 \mathbf{B}_{0,m}(t) + y_1 \mathbf{B}_{1,m}(t) + \dots + y_n \mathbf{B}_{n,m}(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq n - m + 1 \end{aligned} \quad (2.15)$$

(eine Erweiterung auf Raumkurven ist durch Hinzufügen einer dritten Beziehung für die z-Koordinate zu (2.15) leicht zu realisieren). Man beachte, daß bei vorgegebenen Basispolynomen keine Ansatzparameter auszurechnen sind, die Approximationsfunktionen werden "einfach aufgeschrieben".

Als Basispolynome $\mathbf{B}_{i,m}$ für (2.15) werden die sogenannten **Bernstein-Polynome** oder die sogenannten **B-Spline-Funktionen** verwendet, der Index m kennzeichnet den Grad des Polynoms.

Hinweis: Leider fängt alles mit "B" an ("Bézier", "Bernstein", "B-Spline"), was zu Verwechslungen führen kann und zu unterschiedlichen Bezeichnungen in der Literatur geführt hat. Also: B-Spline ist nicht die Abkürzung für Bézier-Spline (sondern für "Basic Spline Curve").

Von manchen Autoren werden die mit Bernstein-Polynomen gebildeten Bézier-Funktionen als Alternative zu den B-Splines behandelt, die sich nach deren Terminologie dann aus "Basis-Funktionen" (noch ein "B") zusammensetzen, andere unterscheiden zwischen Bézier-Bernstein- (Basis sind die Bernstein-Polynome) und Bézier-B-Spline-Approximation (Basis sind die B-Spline-Funktionen). Alles klar?

Zur Klarstellung: Hier werden **alle** Approximationen nach (2.15) als Bézier-Approximationen bezeichnet und **zunächst** (im Abschnitt 2.4.1) auf der Basis von **Bernstein-Polynomen** behandelt, die Bézier-Approximation auf der Basis von B-Spline-Funktionen wird im Abschnitt 2.4.2 besprochen.

2.4.1 Bézier-Bernstein-Approximation

Für diesen Fall gilt $m = n$ (Grad der Approximationsfunktionen (2.15) ist um 1 kleiner als die Anzahl der Stützstellen). Die nur für den Bereich $0 \leq t \leq 1$ definierten

Bernstein-Polynome n -ten Grades

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \quad (2.16)$$

haben z. B. für $n = 3$ folgendes Aussehen:

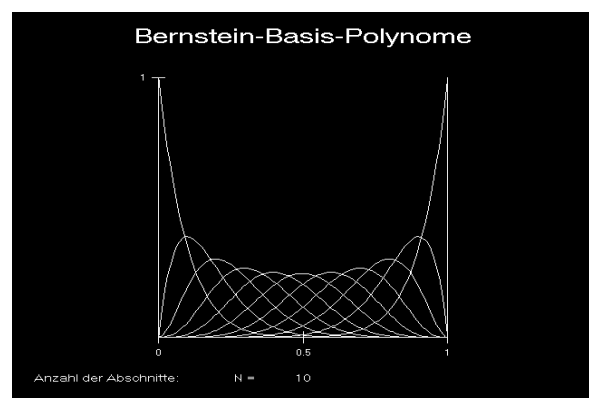
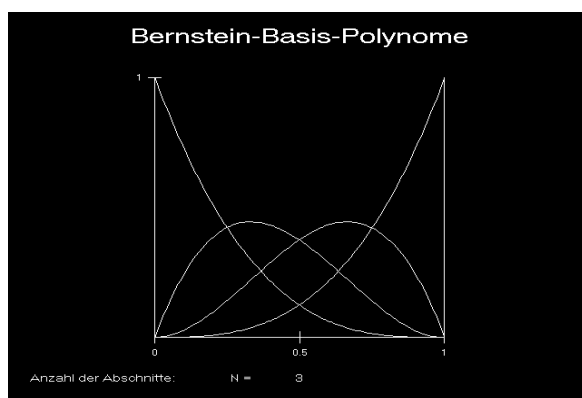
$$\begin{aligned} B_{0,3} &= 1 - 3t + 3t^2 - t^3, \\ B_{1,3} &= 3t - 6t^2 + 3t^3, \\ B_{2,3} &= 3t^2 - 3t^3, \\ B_{3,3} &= t^3. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Die **Bézier-Bernstein-Approximation mit 4 Stützstellen** $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ würde also beschrieben werden durch:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 (1 - 3t + 3t^2 - t^3) + x_1 (3t - 6t^2 + 3t^3) + x_2 (3t^2 - 3t^3) + x_3 t^3, \\ y(t) &= y_0 (1 - 3t + 3t^2 - t^3) + y_1 (3t - 6t^2 + 3t^3) + y_2 (3t^2 - 3t^3) + y_3 t^3. \end{aligned} \quad (2.18)$$

In der MATHLIB-Library steht eine **DOUBLE-PRECISION-FUNCTION BZBERN_M** zur Verfügung, mit der der Funktionswert an der Stelle t (im Intervall $0 \leq t \leq 1$) eines beliebigen Bernstein-Polynoms $B_{i,n}(t)$ berechnet werden kann.

Das auf dem NOVELL-Server ebenfalls verfügbare Beispielprogramm **BZBERN01** berechnet mit Hilfe von BZBERN_M alle Bernstein-Polynome für ein vorzugebendes n und stellt sie graphisch dar. Die nachfolgenden Bildschirm-Schnappschüsse zeigen die 4 Bernstein-Polynome für $n = 3$, wie sie von den Gleichungen (2.17) beschrieben werden (linkes Bild), und die 11 Bernstein-Polynome für $n = 10$.

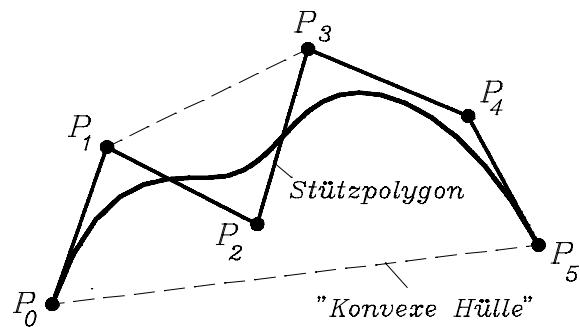


Man erkennt eine typische Eigenschaft der Bernstein-Polynome: Die beiden Polynome für $i = 0$ und $i = n$ nehmen an den Rändern den Wert 1 an, alle übrigen Bernstein-Polynome

verschwinden an beiden Rändern (dies ist der Grund für die erste der nachfolgend formulierten Eigenschaften der Bézier-Bernstein-Approximationen).

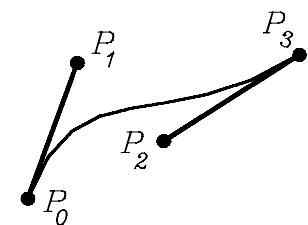
Für **Bézier-Bernstein-Approximationen beliebigen Grades** gelten folgende Eigenschaften, die sich zum Teil auf das sogenannte "Stützpolygon" (Polygonzug durch alle Stützpunkte) beziehen und sich am Spezialfall (2.18) leicht bestätigen lassen:

- ◆ Die Bézier-Bernstein-Kurve hat mit dem Stützpolygon den Anfangspunkt (x_0, y_0) und den Endpunkt (x_n, y_n) gemeinsam (man überzeugt sich leicht durch Einsetzen der Parameterwerte $t = 0$ bzw. $t = 1$ in die Beziehung (2.18)). Die übrigen Punkte beeinflussen den Verlauf (üben eine "Anziehungskraft" auf die Kurve aus).
- ◆ Die Richtung der Tangente der Bézier-Bernstein-Kurve im Punkt (x_0, y_0) stimmt mit der Richtung des 1. Segments des Stützpolygons (Segment zwischen den Punkten P_0 und P_1), im Punkt (x_n, y_n) mit der Richtung des letzten Segments des Stützpolygons überein.
- ◆ Die Bézier-Bernstein-Kurve liegt vollständig innerhalb der konvexen Hülle der Stützpunkte ("Konvexe Hülle": Man denke sich ein Gummiband um sämtliche Stützpunkte gelegt).



Bézier-Bernstein-Approximation für $n = 5$

Für Bézier-Bernstein-Approximationen mit 4 Stützpunkten ($n = 3$), wie sie von den Funktionen (2.17) und (2.18) beschrieben werden, läßt sich die entstehende Kurve sehr schön mechanisch deuten: Man stelle sich eine elastische Biegefeder ("Spline") vor, deren Endpunkte mit den Punkten P_0 und P_3 zusammenfallen. An den Endpunkten sind (parallel zur Biegefeder) zwei starre Hebel fest angeschweißt. Diese werden nun (durch Drehung um P_0 bzw. P_3) auf die Verbindungslinien von P_0 und P_1 bzw. P_3 und P_2 ausgerichtet. Dann nimmt die Biegefeder die Form der Bézier-Bernstein-Kurve an (unbelasteter Biegeträger, dem an den Endpunkten vorgeschriebene Biegewinkel aufgezwungen werden).

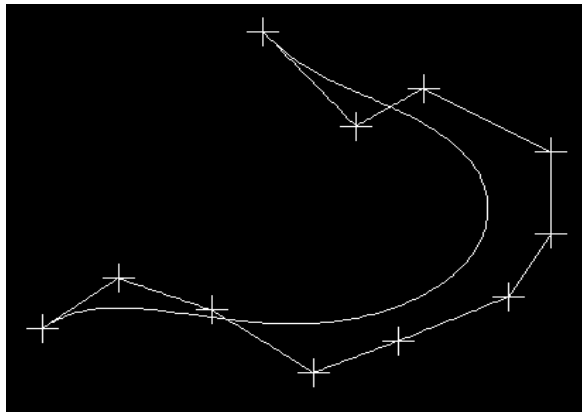


Biegefeder-Modell für $n = 3$

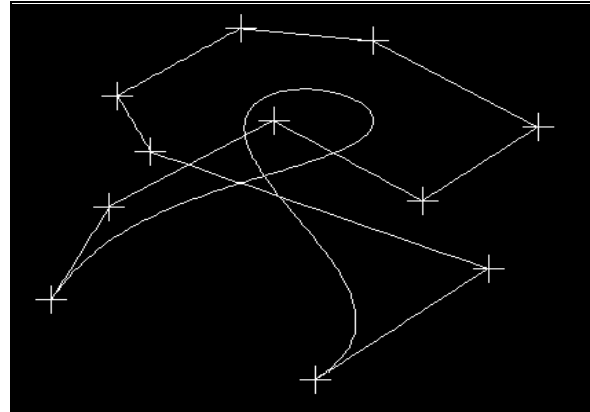
Für Bézier-Bernstein-Approximationen mit $n > 3$ gilt das beschriebene "Biegefeder-Modell" nicht mehr, die Tangentenrichtung in den Endpunkten wird allerdings auch in diesem Falle von den jeweiligen Nachbarpunkten definiert.

Für große Werte von n können die Approximationsfunktionen erheblich vom Stützpolygon abweichen. Der Einfluß des einzelnen Punktes auf den Verlauf läßt dann nach, obwohl jede Koordinatenänderung den gesamten Verlauf der Funktion ändert.

Die nachfolgenden Bildschirm-Schnappschüsse wurden mit dem Programm **BEZIER** erzeugt (im Abschnitt 2.4.2 beschrieben). Sie zeigen jeweils Bézier-Bernstein-Approximationen für $n = 10$ einschließlich der 11 Stützpunkte und dem Stützpolygon. Man erkennt (besonders im rechten Bild) die Abweichungen der Kurven von den Stützpunkten:



Bézier-Bernstein-Approximationen weichen ...

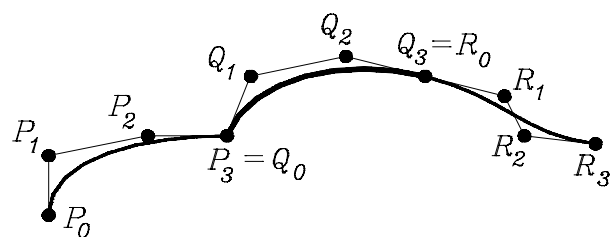


... zum Teil erheblich vom Stützpolygon ab

- ◆ Daß der Grad der Bézier-Bernstein-Polynome an die Anzahl der Stützstellen gekoppelt ist, kann sich bei einer sehr großen Stützstellen-Anzahl nachteilig auswirken. Da sich die Änderungen einer einzigen Punktkoordinate ohnehin immer auf den gesamten Verlauf auswirken, führt dies bei Polynomen höheren Grades zu einem "instabilen Verhalten", bei dem ganz geringfügige Änderungen der Kurve einen deutlich geänderten Verlauf aufzwingen. Abhilfe kann die gleiche Strategie schaffen, die bei den natürlichen Splines (Abschnitt 2.2) verfolgt wurde: Es werden abschnittsweise Bézier-Bernstein-Polynome niedriger Ordnung verwendet, die an den Nahtstellen auf geeignete Weise verbunden werden müssen.

Hierbei zeigt sich eine Eigenschaft der Bézier-Kurven, die gleichzeitig eine Stärke und eine Schwäche dieser Approximationsfunktionen ist. Der erhebliche Vorteil, daß die Bézier-Funktionen einfach mit den Stützstellen-Koordinaten aufgeschrieben werden können (es müssen keine Ansatzparameter berechnet werden), bedeutet natürlich auch, daß für eine weitere (benachbarte) Funktion ein selbständiger Ausdruck formuliert wird, der durch keinerlei "Übergangsbedingungen" (wie bei den natürlichen Splines) mit seinem Vorgänger gekoppelt ist. Für den "gewünschten Übergang" muß der Konstrukteur selbst sorgen.

Interaktiv können zwei Funktionen auf bequeme Art aneinandergesetzt werden. Wenn der erste Nachbarpunkt nach der Nahtstelle auf einer Geraden mit den beiden letzten Punkten des vorherigen Abschnitts liegt, stoßen auch die beiden benachbarten Bézier-Funktionen tangential aneinander, anderenfalls entsteht eine Ecke mit einem Winkel zwischen den Tangenten, der exakt definierbar ist. Die Skizze zeigt beide Varianten: Während die mit den Punkten P_0 bis P_3 bzw. Q_0 bis Q_3 erzeugten Funktionen im gemeinsamen Punkt $P_3 = Q_0$ eine Ecke bilden, gehen die mit den Punkten Q_0 bis Q_3 bzw. R_0 bis R_3 erzeugten Funktionen tangential ineinander über, weil die drei Punkte Q_2 , $Q_3 = R_0$ und R_2 auf einer Geraden liegen.



Drei Bézier-Bernstein-Funktionen

Die Skizze zeigt beide Varianten: Während die mit den Punkten P_0 bis P_3 bzw. Q_0 bis Q_3 erzeugten Funktionen im gemeinsamen Punkt $P_3 = Q_0$ eine Ecke bilden, gehen die mit den Punkten Q_0 bis Q_3 bzw. R_0 bis R_3 erzeugten Funktionen tangential ineinander über, weil die drei Punkte Q_2 , $Q_3 = R_0$ und R_2 auf einer Geraden liegen.

Diese einfache Möglichkeit, auf die Übergänge Einfluß zu nehmen, wird von dem interaktiv mit einem CAD-System arbeitenden Konstrukteur natürlich geschätzt.

2.4.2 Bézier-B-Spline-Approximationen

Mit den sogenannten "B-Splines" als Basisfunktionen der Bézier-Approximation (2.15) gelingt es, alle Vorteile der Bézier-Bernstein-Approximation bei Ausschaltung der Mängel zu erhalten. Insbesondere gelingt die Entkopplung des Grades m der Polynomfunktionen von der Anzahl der Stützstellen $n + 1$ (in dieser Hinsicht besteht eine Verwandtschaft mit den natürlichen Splines). Man bezahlt die Vorteile mit einem höheren Aufwand bei der Berechnung der Funktionswerte für die Basisfunktionen, deren rekursive Definition etwas kompliziert aussieht, was den Anwender, der die Auswertung der Formeln einem Programm überträgt, aber nicht berührt.

Definition der B-Spline-Basisfunktionen:

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.19)$$

$$B_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1} \quad (2.20)$$

Da diese Basisfunktionen für alle Stützstellen $i = 0, 1, \dots, n$ berechnet werden müssen, nehmen die Indizes der t_j in (2.19) und (2.20) die Werte $j = 0, 1, \dots, n + m + 1$ an (m ist der zu wählende Grad der Basisfunktionen). Die t_j müssen wie folgt in (2.19) und (2.20) eingesetzt werden:

$$t_j = \begin{cases} 0 & \text{für } j \leq m \\ j - m & \text{für } m + 1 \leq j \leq n \\ n - m + 1 & \text{für } j > n \end{cases} \quad (2.21)$$

Bei der Auswertung von (2.20) können Ausdrücke der Form " $0/0$ " auftreten, für die jeweils der Wert 0 angenommen werden muß.

Der Definitionsbereich für die B-Spline-Basisfunktionen entspricht dem Bereich, den auch die ganzzahligen t_j -Werte nach (2.21) annehmen können:

$$0 \leq t \leq n - m + 1 \quad (2.22)$$

Die Berechnung einer B-Spline-Basisfunktion $B_{i,m}$ nach dem Formelsatz (2.19) bis (2.22) beginnt mit der Ermittlung von $m + 1$ Werten $B_{i,0}, B_{i+1,0}, \dots, B_{i+m,0}$ nach (2.19), damit lassen sich dann m Werte $B_{i,1}, B_{i+1,1}, \dots, B_{i+m-1,1}$ nach (2.20) berechnen usw., bis sich schließlich der Wert für $B_{i,m}$ ebenfalls nach (2.20) ergibt.

Da die Definition der Bézier-B-Spline-Approximation nach (2.15) im Zusammenhang mit (2.19) bis (2.22) zunächst doch etwas verwirrend erscheinen mag, sollen die wichtigsten Aussagen noch einmal zusammengestellt werden:

- ◆ Gegeben sind $n + 1$ Punkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Unabhängig von der Anzahl der Punkte wird der **Grad der B-Spline-Basisfunktionen** m festgelegt.
- ◆ Die Parameterdarstellung der Bézier-B-Spline-Approximation kann dann in der Form

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \mathbf{B}_{0,m}(t) + x_1 \mathbf{B}_{1,m}(t) + \dots + x_n \mathbf{B}_{n,m}(t) \quad , \\ y(t) &= y_0 \mathbf{B}_{0,m}(t) + y_1 \mathbf{B}_{1,m}(t) + \dots + y_n \mathbf{B}_{n,m}(t) \end{aligned} \quad (2.23)$$

aufgeschrieben werden, wobei die $\mathbf{B}_{i,m}$ rekursiv nach (2.19) bis (2.22) definiert sind.

- ◆ Die von (2.23) beschriebene Kurve überstreicht den Bereich vom Punkt (x_0, y_0) bis zum Punkt (x_n, y_n) , wenn der Parameter t das Intervall

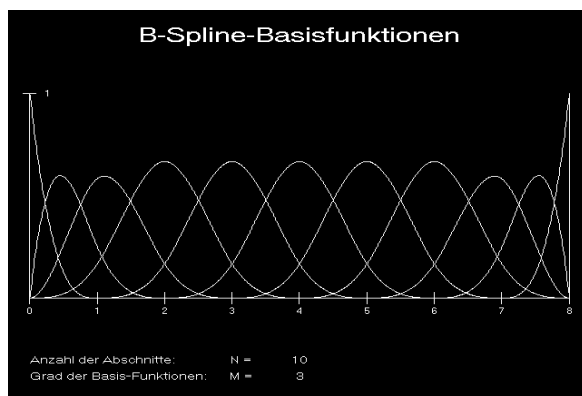
$$0 \leq t \leq n - m + 1$$

durchläuft.

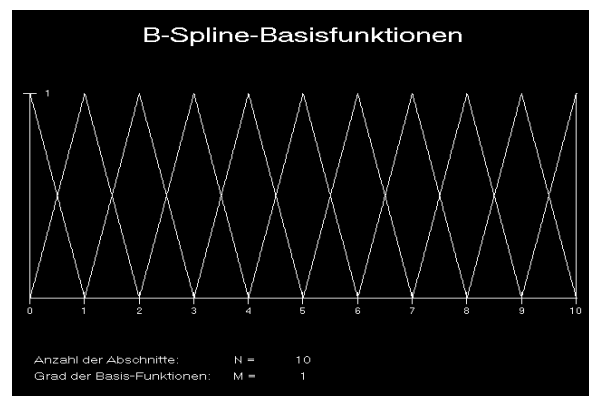
- ◆ Beispiel: Wenn für $n = 10$ (11 Punkte) B-Spline-Basisfunktionen 3. Grades ($m = 3$) verwendet werden, dann muß (2.23) für das Intervall $0 \leq t \leq 8$ ausgewertet werden.

In der MATHLIB-Library steht eine **DOUBLE-PRECISION-FUNCTION BSPLIN_M** zur Verfügung, mit der der Funktionswert an der Stelle t (im Intervall $0 \leq t \leq n - m + 1$) einer beliebigen B-Spline-Basisfunktion $\mathbf{B}_{i,m}(t)$ berechnet werden kann. Der Programmierer braucht sich also um die Auswertung der Formeln (2.19) bis (2.22) nicht weiter zu kümmern.

Das auf dem NOVELL-Server ebenfalls verfügbare Beispielprogramm **BSPLIN01** berechnet mit Hilfe von BSPLIN_M alle B-Spline-Basisfunktionen eines vorzugebenden Grades m und für ein vorzugebendes n , und stellt sie graphisch dar. Die nachfolgenden Bildschirm-Schnappschüsse zeigen für $n = 10$ die jeweils $n + 1$ B-Spline-Basisfunktionen 3. Grades ($m = 3$) bzw. 1. Grades ($m = 1$).



$n = 10, m = 3, t = 0 \dots 8$



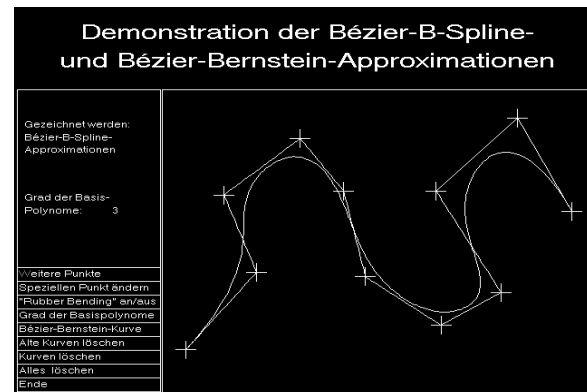
$n = 10, m = 1, t = 0 \dots 10$

Man erkennt eine besonders wichtige Eigenschaft der B-Spline-Basis-Funktionen: Sie sind nur in einem relativ schmalen Bereich von Null verschieden (je kleiner der Grad der Ansatzfunktionen, desto schmaler ist dieser Bereich). Damit unterscheiden sie sich von den Bernstein-Polynomen, die im gesamten Definitionsbereich (bis auf eine Nullstelle) von Null verschieden sind.

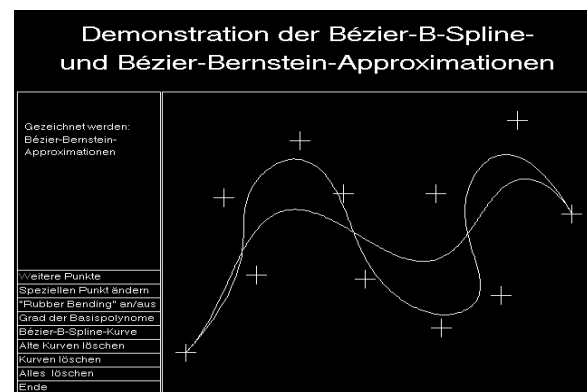
Gemeinsam mit den Bernstein-Polynomen haben die B-Spline-Basisfunktionen die Eigenschaft, für $i = 0$ und $i = n$ an den Rändern den Wert 1 anzunehmen, während alle übrigen Polynome an beiden Rändern verschwinden.

Die wichtigsten Eigenschaften der **Bézier-B-Spline-Approximationen** werden nachfolgend zusammengestellt (die Bildschirm-Schnappschüsse, die diese Eigenschaften an Beispielen demonstrieren, wurden mit dem Programm **BEZIER** erzeugt, das auf dem NOVELL-Server verfügbar ist):

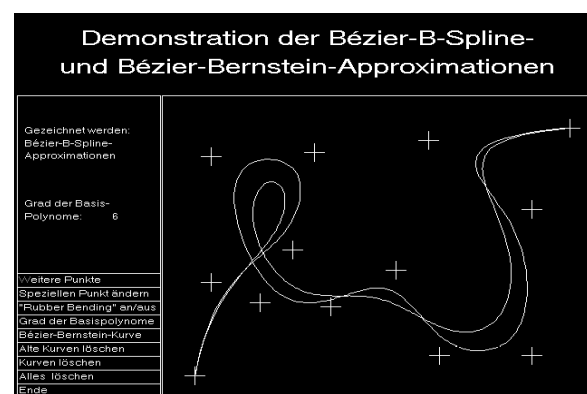
- ◆ Alle für die Bézier-Bernstein-Approximationen aufgelisteten Eigenschaften (Abschnitt 2.4.1) gelten auch für die Bézier-B-Spline-Approximationen (Anfangs- und Endpunkte sind mit den Anfangs- und Endpunkten des Stützpolygons identisch, Tangentenrichtungen in diesen Punkten stimmen mit den Tangentenrichtungen des Stützpolygons überein, Kurve liegt vollständig innerhalb der "konvexen Hülle" der Stützpunkte).
- ◆ Für $m = 1$ (lineare B-Spline-Basis-Polynome) ist die Bézier-B-Spline-Approximation mit dem Stützpolygon identisch.
- ◆ Für $m = n$ (Grad der B-Spline-Basispolynome ist um 1 kleiner als die Anzahl der Stützstellen und entspricht damit dem Grad der Bernstein-Polynome) ist die Bézier-B-Spline-Approximation mit der Bézier-Bernstein-Approximation identisch.
- ◆ Je niedriger der Grad der B-Spline-Basisfunktionen ist, desto besser ist die Anpassung der Bézier-B-Spline-Approximation an das Stützpolygon (man vergleiche den nebenstehenden Bildschirm-Schnappschuß). Deshalb werden besonders gern Basisfunktionen mit $m = 2$ oder $m = 3$ verwendet.
- ◆ Bézier-B-Spline-Approximationen passen sich besser an den Stützpolygonzug an als die Bézier-Bernstein-Approximationen (Ausnahme ist der Fall $m = n$).
- ◆ Da die B-Spline-Basispolynome nur in einem (bei kleinem m sehr schmalen) Bereich von Null verschieden sind, können die Bézier-B-Spline-Approximationen lokal kontrolliert werden: Die Änderung eines Punktes hat im allgemeinen nur Auswirkungen auf die Bereiche in der Nähe dieses Punktes (genau auf $m + 1$ Bereiche, bei



$n = 10$, $m = 3$ und $m = 1$ (Stützpolygon)



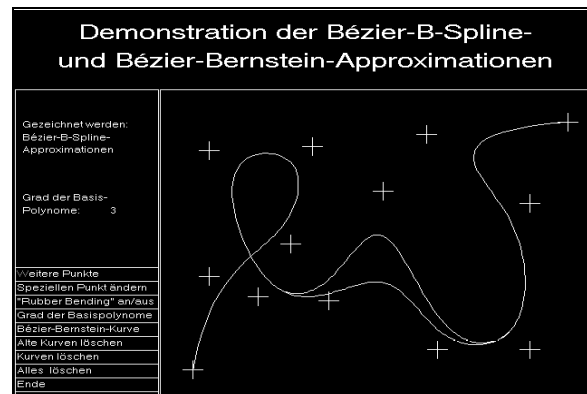
$m = 3$ und Bézier-Bernstein-Approximation



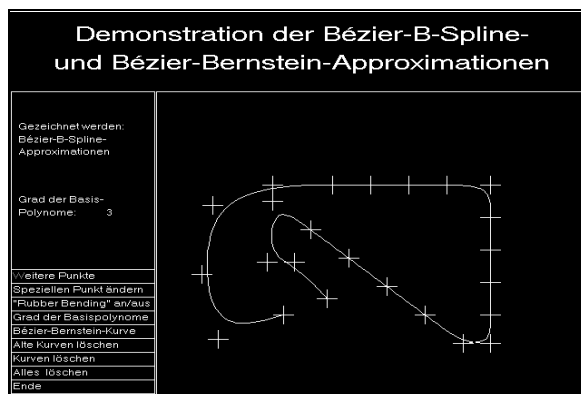
B-Spline-Approximationen: $n = 12$, $m = 3$ und $m = 6$

$m = 3$ z. B. auf jeweils zwei Bereiche links bzw. rechts vom geänderten Punkt). Der nebenstehende Bildschirm-Schnappschuß zeigt die Auswirkung der Verschiebung eines Punktes, der vorher etwa in der Mitte der Zeichenfläche lag, nach oben.

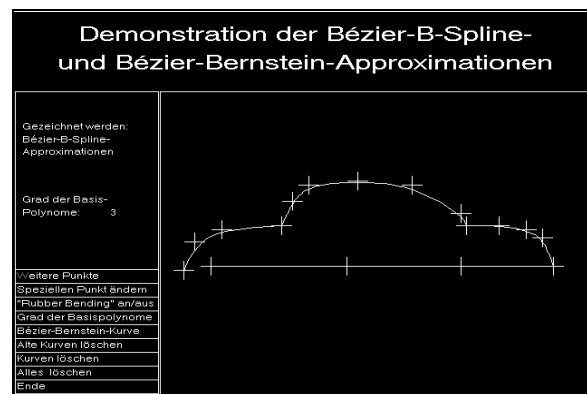
- ◆ Wenn mindestens $m + 1$ Punkte des Stützpolygons auf einer Geraden liegen, dann ist auch die Bézier-B-Spline-Approximation in diesem Bereich eine Gerade (es können exakt linear verlaufende Teilstücke realisiert werden).
- ◆ Es ist möglich, zwei oder mehr identische Punkte in die Punktfolge einzufügen, die dann eine entsprechend "vergrößerte Anziehungskraft" auf die Kurve ausüben. Bei $m + 1$ (oder mehr) identischen Punkten, verläuft die Kurve durch diese Punkte. Da die Kurve an solchen Stellen eine theoretisch unendlich große Krümmung realisieren kann, hat man damit auch die Möglichkeit, einen "Knick" in den Kurvenverlauf einzufügen.



Auswirkung der Verschiebung eines Punktes ($m = 3$)



Bézier-B-Spline-Kurve mit linearen Teilstücken



"Knick"-Punkte, realisiert durch identische Punkte

Aufgabe 2.6: Man starte das Programm **BEZIER** und erzeuge Bézier-Splines, mit denen alle aufgelisteten Eigenschaften der Bézier-B-Spline- und der Bézier-Bernstein-Approximationsfunktionen deutlich werden.

Hinweis: Das Programm **BEZIER** arbeitet bei der Punkt-Eingabe mit sogenanntem "Rubber Bending": Bei jeder Mausbewegung oder Betätigung einer Cursor-Taste wird der Punkt, den die aktuelle Lage des Cursors kennzeichnet, als "vermutlich nächster Punkt" angenommen und die sich damit ergebende Kurve berechnet und gezeichnet. Dies ist außerordentlich aufwendig und kann von weniger leistungsfähigen Computern kaum mit angemessener Reaktionszeit realisiert werden. Man sollte in diesem Fall das "Rubber Bending" (durch Wahl des entsprechenden Menüangebots) abschalten.

2.4.3 Bézier-Flächen

Die Approximation gekrümmter Flächen kann nach den gleichen Prinzipien erfolgen wie die Bézier-Approximation gekrümmter Kurven. Im Gegensatz zu den in der Ebene verteilten $n + 1$ Stützpunkten für die Beschreibung ebener Kurven wird ein **Stützpunkt-Netz** mit $(n_s + 1) \cdot (n_t + 1)$ Punkten

$$(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}), \quad i = 0, 1, \dots, n_s, \quad j = 0, 1, \dots, n_t$$

zur Definition der Fläche verwendet. Man beachte, daß (wie bei der Kurven-Approximation) die Reihenfolge der Stützstellen eine wesentliche Rolle spielt. Man sollte sich die Punktmenge als Matrix mit $(n_s + 1)$ Zeilen und $(n_t + 1)$ Spalten vorstellen. Jede Zeile definiert dann eine Bézier-Kurve, ebenso jede Spalte. Diese zweiparametrische Kurvenschar ist das "Gerüst" für die zu approximierende Fläche.

Wie bei der Bézier-Bernstein-Approximation von Kurven bestimmt die Anzahl der Stützpunkte den Grad des zu verwendenden Bernstein-Polynoms. Da das Stützpunkt-Netz mit unterschiedlichen Werten für n_s bzw. n_t definiert sein kann, werden im allgemeinen allerdings "Bernstein-s-Polynome" und "Bernstein-t-Polynome" unterschiedlichen Grades verwendet werden müssen, beide sind allerdings durch die gleiche Definition nach (2.16) festgelegt. Analog zu (2.15) kann die **Parameterdarstellung der Bézier-Bernstein-Fläche** wie folgt aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} x(s, t) &= \sum_{i=0}^{n_s} \sum_{j=0}^{n_t} x_{ij} B_{i,n_s}(s) B_{j,n_t}(t) \quad , \\ y(s, t) &= \sum_{i=0}^{n_s} \sum_{j=0}^{n_t} y_{ij} B_{i,n_s}(s) B_{j,n_t}(t) \quad , \\ z(s, t) &= \sum_{i=0}^{n_s} \sum_{j=0}^{n_t} z_{ij} B_{i,n_s}(s) B_{j,n_t}(t) \quad . \end{aligned} \tag{2.24}$$

Die Parameter s und t nehmen dabei die Werte $0 \leq s \leq 1$ und $0 \leq t \leq 1$ an.

Die **Bézier-B-Spline-Flächen** werden mit den B-Spline-Basisfunktionen nach (2.19) bis (2.22) aufgeschrieben, deren Grad m_s (bzw. m_t) unabhängig von der Anzahl der Stützstellen ist (m_s und m_t dürfen durchaus unterschiedlich sein):

$$\begin{aligned} x(s, t) &= \sum_{i=0}^{n_s} \sum_{j=0}^{n_t} x_{ij} B_{i,m_s}(s) B_{j,m_t}(t) \quad , \\ y(s, t) &= \sum_{i=0}^{n_s} \sum_{j=0}^{n_t} y_{ij} B_{i,m_s}(s) B_{j,m_t}(t) \quad , \\ z(s, t) &= \sum_{i=0}^{n_s} \sum_{j=0}^{n_t} z_{ij} B_{i,m_s}(s) B_{j,m_t}(t) \quad . \end{aligned} \tag{2.25}$$

Die Parameter s und t nehmen dabei analog zu (2.22) die Werte $0 \leq s \leq n_s - m_s + 1$ und $0 \leq t \leq n_t - m_t + 1$ an.

Auf die beiden Bézier-Flächen-Approximationen (2.24) und (2.25) übertragen sich sinngemäß die Eigenschaften der entsprechenden Kurven-Approximationen.