Aufgabe 2.1

Für den skizzierten Träger berechne man die Lagerreaktionen und gebe die Transformationsmatrizen an, die

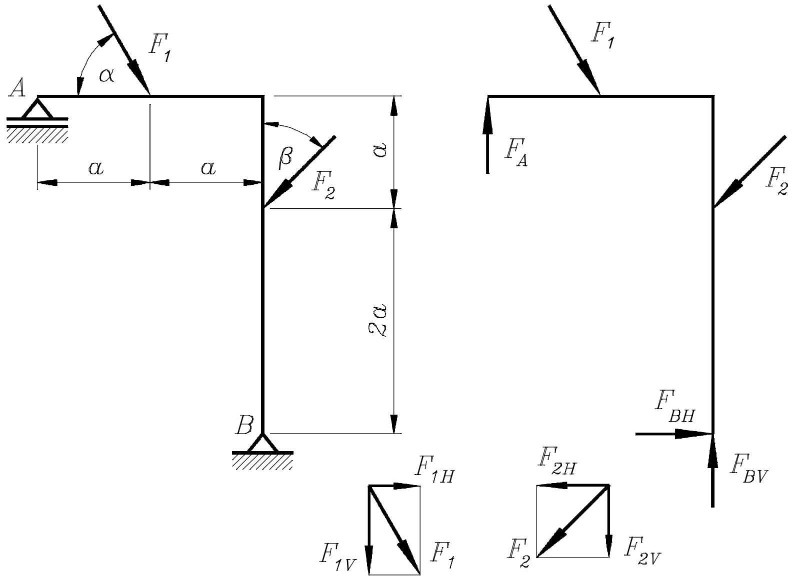
a) die Kräfte $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$ auf die drei Lagerreaktionen,

b) die Kräfte $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$ auf ihre vier Komponenten $\boldsymbol{F_{1H}}$, $\boldsymbol{F_{1V}}$, $\boldsymbol{F_{2H}}$, $\boldsymbol{F_{2V}}$,

c) die 4 Kraftkomponenten $\boldsymbol{F_{1H}}$, $\boldsymbol{F_{1V}}$, $\boldsymbol{F_{2H}}$, $\boldsymbol{F_{2V}}$ auf die Lagerreaktionen

abbilden.

Geg.: $\alpha = \mathbf{60°}$; $\beta = \mathbf{45°}$.



Aufgabe 2.2

Zwei Kräfte sind durch die Vektoren $\vec{F}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} kN$ *und* $\vec{F}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} kN$ gegeben.

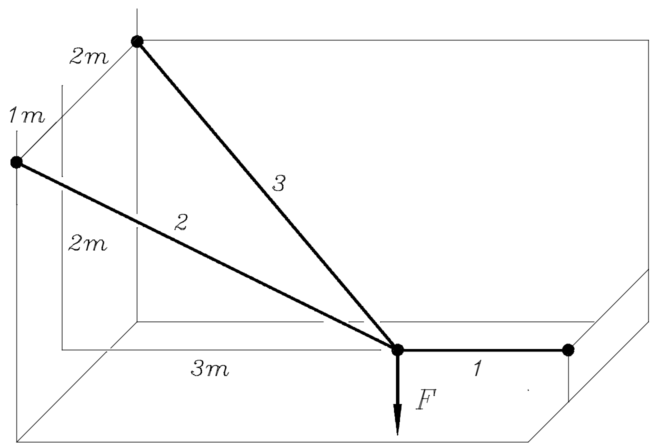
Man berechne a) die Beträge der Kräfte $\boldsymbol{F_1}$ und $\boldsymbol{F_2}$,

b) den Winkel α zwischen den beiden Kräften und den Winkel β zwischen der Kraft $\boldsymbol{F_1}$ und der $\boldsymbol{x}$-Achse.

Aufgabe 2.3 Wie groß ist der Winkel zwischen einem Vektor in der $\boldsymbol{x}$-$\boldsymbol{y}$-Ebene, der mit der $\boldsymbol{x}$-Achse einen Winkel von **20°** bildet und der Winkelhalbierenden in der $\boldsymbol{y}$-$\boldsymbol{z}$-Ebene zwischen $\boldsymbol{y}$- und $\boldsymbol{z}$-Achse.

Aufgabe 2.4

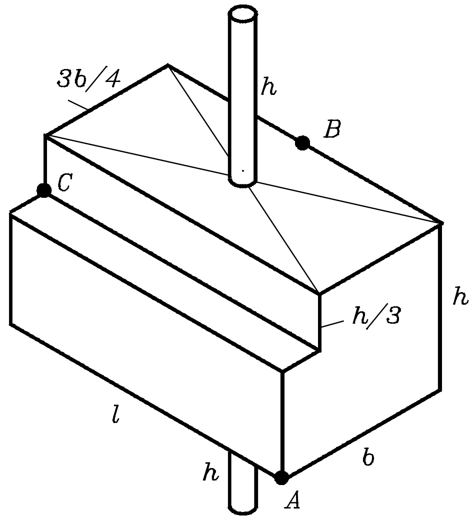
Eine vertikal gerichtete Kraft belastet wie skizziert die drei Seile **1**, **2** und **3**. Man bestimme die Kräfte in den Seilen.



Aufgabe 2.5 Ein Quader hat die Kantenlängen $\boldsymbol{a = 4\ cm}$; $\boldsymbol{b = 7\ cm}$; $\boldsymbol{c = 9\ cm}$. Von einer Ecke aus sind die drei Flächendiagonalen der angrenzenden Rechtecke und die Raumdiagonale des Quaders zu ziehen. Welche Winkel α, β, γ schließen die Flächendiagonalen mit der Raumdiagonalen ein?

Aufgabe 2.6

Das skizzierte Werkstück wird zerschnitten, so daß es in zwei Teile zerfällt. Die Schnittebene verläuft durch die drei Punkte $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ (Mitte der hinteren Kante) und $\boldsymbol{C}$. Der zylindrische Stift (Gesamtlänge: $3\boldsymbol{h}$) wird dabei auch zerschnitten und gehört danach mit einer Länge $\boldsymbol{h_1}$ zum unteren Teil und mit einer Länge $\boldsymbol{h_2}$ zum oberen Teil des Werkstücks ($\boldsymbol{h_1} + \boldsymbol{h_2} = 3\boldsymbol{h}$).

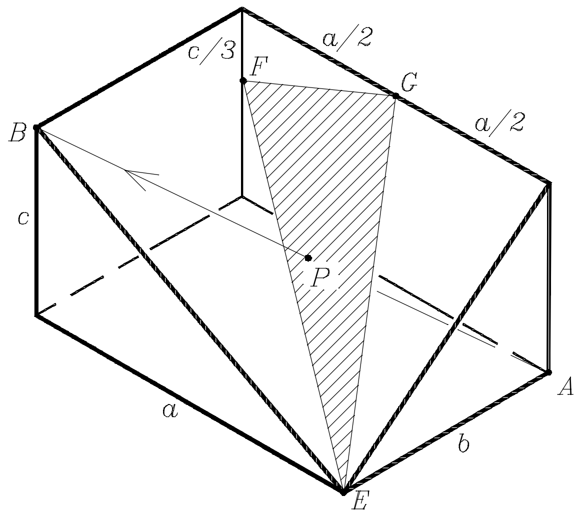


Wie groß ist das Verhältnis $\boldsymbol{h_1}/\boldsymbol{h_2}$?

Hinweis: Alle Kanten des Werkstücks stoßen an den Ecken rechtwinklig aneinander. Der Stift durchstößt die Rechteckflächen ebenfalls rechtwinklig und ragt nach oben und unten jeweils um die Strecke $\boldsymbol{h}$ aus dem Werkstück heraus.

Aufgabe 2.7

Ein von $\boldsymbol{A}$ nach $\boldsymbol{B}$ gerichteter Laserstrahl durchdringt bei $\boldsymbol{P}$ eine ebene Membran, die zwischen den Punkten $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{G}$ gespannt ist.



a) Man gebe das Verhältnis der Längen der beiden Strecken an, die der Laserstrahl vor und nach dem Durchdringen der Membran zurücklegt.

b) Man zeichne in die nebenstehende Skizze ein kartesisches Koordinatensystem ein und bestimme für dieses gewählte Koordinatensystem die Koordinaten des Punktes $\boldsymbol{P}$ für $\boldsymbol{a} = \mathbf{90}\ \boldsymbol{mm}$; $\boldsymbol{b} = \mathbf{63}\ \boldsymbol{mm}$; $\boldsymbol{c} = \mathbf{45}\ \boldsymbol{mm}$.

Aufgabe 2.8

Die kinetische Energie eines bewegten Massensystems errechnet sich nach der Formel

$$T = \frac{1}{2}\,\bar{v}^T\,\bar{M}\,\bar{v} \quad .$$

Für ein System mit vier Freiheitsgraden (Anzahl der Geschwindigkeitskomponenten) sind die Massenmatrix und der Geschwindigkeitsvektor gegeben:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 16 & -8 & 4 & 12 \\ -8 & 8 & -14 & -6 \\ 4 & -14 & 46 & -3 \\ 12 & -6 & -3 & 38 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad .$$

Man berechne $\boldsymbol{T}$.

Aufgabe 2.9 Eine Holzbaufirma stellt drei verschiedene Typen von Zaunfeldern her (z_1, z_2, z_3), für die drei Sorten Zaunlatten l_1, l_2, l_3, eine Sorte Zaunpfosten und Nägel verwendet werden. Der Materialeinsatz für die einzelnen Zaunfelder ist durch die folgende Tabelle gegeben:

	l_1 [m]	l_2 [m]	l_3 [m]	Pfosten [m]	Nägel [kg]
z_1	20	2	3	2	0,2
z_2	15	15	10	1	0,3
z_3	12	0	18	4	0,18

		[kg/m]
l_1	1,50 DM/m	1,5
l_2	2,10 DM/m	1,8
l_3	1,80 DM/m	1,6
Pfosten	3,00 DM/m	6,0
Nägel	9,00 DM/kg	---

Die spezifischen Materialkosten und Massen sind der nebenstehenden Tabelle zu entnehmen.

a) Man berechne die Materialkosten für die drei Zaunfeldertypen.

b) Man ermittle die Massen der drei Zaunfeldertypen.

c) Es werden **2** Lkw-Ladungen zusammengestellt: **Lkw 1** lädt **20** Felder z_1, **15** Felder z_2 und **3** Felder z_3, **Lkw 2** lädt **8** Felder z_1, **40** Felder z_2 und **12** Felder z_3. Welche Massen laden die beiden Lkw?

Aufgabe 2.10

Man berechne das Produkt

$$\bar{C} = \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{B}^T$$

mit den nebenstehenden Matrizen.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 & -7 \\ -2 & 3 & 10 & -12 & 10 \\ 1 & 7 & -4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 9 \\ 4 & -4 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} .$$

Aufgabe 2.11

Man berechne die Produkte

$$\bar{R}^T\,\bar{R} \quad und \quad \bar{R}\,\bar{R}^T \quad mit \quad \bar{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} .$$

Aufgabe 2.12 Man berechne die Werte der folgenden Determinanten:

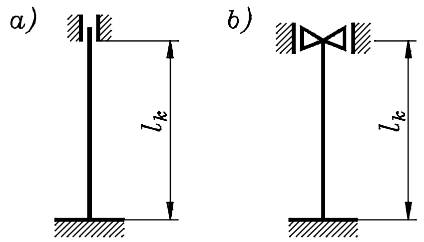
$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -5 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad ; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 9 & 0 & -7 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 143 & -17 & -23 \\ 102 & 64 & -51 \\ 225 & -179 & 33 \end{vmatrix} \quad ;$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 13 & 8 & 8 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -23 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 34 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & 73 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -23 & 22 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 12 & -14 & 71 & 16 \end{vmatrix} .$$

Aufgabe 2.13

Schlanke Stäbe, die auf Druck belastet werden, können durch seitliches Ausweichen ("Knicken") als Tragelemente versagen. Als "kritische Länge" $\boldsymbol{l_k}$ wird die Länge bezeichnet, bei der der Stab allein durch sein Eigengewicht knickt. Sie läßt sich für Stäbe mit Kreisquerschnitt mit sehr guter Näherung nach der Formel



$$l_k = \sqrt[3]{\frac{30\,E\,d^2}{\varrho\,g}\,\lambda}$$

berechnen. Darin sind $\boldsymbol{E}$ der Elastizitätsmodul und $\boldsymbol{\varrho}$ die Dichte des Materials, $\boldsymbol{g}$ die Erdbeschleunigung und $\boldsymbol{d}$ der Durchmesser des Stabes.

Gegeben: $\boldsymbol{E = 2{,}1 \cdot 10^5\ N/mm^2}$; $\boldsymbol{\varrho = 7{,}85\ g/cm^3}$; $\boldsymbol{g = 9{,}81\ m/s^2}$; $\boldsymbol{d = 2\ cm}$.

Der Parameter λ ist abhängig von der Lagerung und kann für die beiden skizzierten Fälle aus den folgenden Determinantenbeziehungen berechnet werden. Es ist jeweils der **kleinste** Wert λ, der die Gleichung erfüllt:

$$a)\quad \begin{vmatrix} 4-24\lambda & -\lambda \\ -3\lambda & 1-2\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad b)\quad \begin{vmatrix} 4-2\lambda & -12+12\lambda & 2+\lambda \\ -1+\lambda & 8-48\lambda & -2\lambda \\ 2+\lambda & -24\lambda & 8-16\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Man bestimme die kritischen Längen für die beiden Lagerungsfälle.

Aufgabe 2.14 Man bestimme die Lösungen der Gleichungssysteme:

$$a)\quad \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 12 \end{bmatrix} \bar{X} = \begin{bmatrix} 32 \\ 16 \\ 52 \end{bmatrix} \qquad b)\quad \begin{bmatrix} -2 & 8 & -5 & 6 \\ 8 & -29 & 21 & -26 \\ -10 & 34 & -23 & 36 \\ 24 & -105 & 73 & -61 \end{bmatrix} \bar{X} = \begin{bmatrix} 6 & 11 \\ -35 & -37 \\ 70 & 15 \\ 18 & -248 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2.15 Man ermittle die LR-Zerlegungen der Matrizen:

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -12 & 5 & 13 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -6 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 20 & -21 & 17 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 24 & 1 & -2 & 20 & -5 & 0 \\ -12 & 64 & -49 & 42 & 25 & -6 & -1 \\ -8 & 8 & -23 & 26 & 19 & 24 & -1 \\ 0 & -48 & 21 & -16 & -29 & -37 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -9 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$