Aufgabe 3.1 Es ist jeweils die erste Ableitung nach x von folgenden Funktionen zu bilden:

$$a)\quad y = (2x+4)^3 \qquad b)\quad y = \sqrt{1+\cos x}$$

$$c)\quad y = \frac{2+4x}{3-5x} \qquad d)\quad y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$$

$$e)\quad y = (3-2\sqrt{2x})^5 \qquad f)\quad y = (3+\cos x)^4$$

$$g)\quad y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \qquad h)\quad y = \operatorname{arccot}\frac{1+x}{1-x}$$

Aufgabe 3.2 Es ist jeweils die erste Ableitung an den Stellen x_0 zu berechnen:

$$a)\quad y = \frac{1}{x}(1-\sqrt{x})^2 \quad ; \quad x_0 = 0{,}01 \qquad b)\quad y = \frac{\cos x}{1-\sin x} \quad ; \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$$

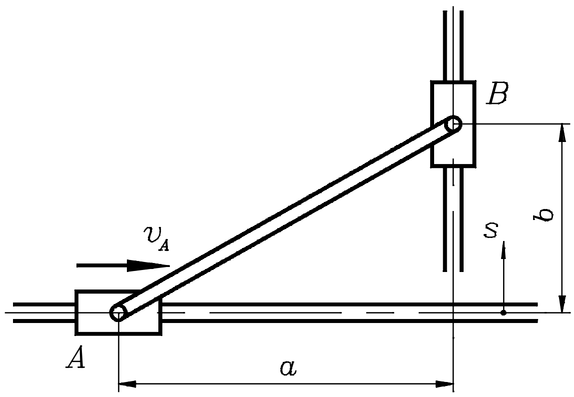
$$c)\quad y = x \arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(x^2+a^2) \quad ; \quad x_0 = a$$

Aufgabe 3.3

In dem skizzierten Mechanismus bewegt sich der Gleitstein A mit der konstanten Geschwindigkeit v_A nach rechts. Zum Zeitpunkt $t = 0$ haben A und B die skizzierten Positionen.

Gegeben: a , b , v_A .

Man bestimme $s(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ für die Bewegung des Gleitsteins B.



Aufgabe 3.4 Man bestimme die folgenden Grenzwerte:

$$a)\quad \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{6-5x+x^2} \qquad b)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x^3} \qquad c)\quad \lim_{x\to 0}(x\ln x)$$

$$d)\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \tan^2 x\right) \qquad e)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right) \qquad f)\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$$

Aufgabe 3.5 Der Kurvenverlauf der nachfolgenden Funktionen ist zu analysieren (Definitionsbereich, Nullstellen, relative Extremwerte, Wendepunkte, Skizze):

$$a)\quad y = x^2\ln x \qquad b)\quad y = 2\cos x + \sin 2x$$

Aufgabe 3.6 Aus einem Kreis (gegeben: Radius R) soll ein Sektor so ausgeschnitten werden, daß ein daraus zu bildender oben offener Kegel maximales Volumen hat. Wie groß ist der Zentriwinkel des Kreissektors, welches Verhältnis h/d haben Höhe und Durchmesser des Kegels?

Aufgabe 3.7 In einen Halbkreis (gegeben: Radius $\boldsymbol{R}$) soll ein Rechteck

a) mit der größtmöglichen Fläche,

b) mit dem größtmöglichen Umfang

eingezeichnet werden. Man bestimme die Längen der beiden Rechteckseiten $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$.

Aufgabe 3.8 Für Zug/Druck-Stäbe bzw. Biegeträger mit Rechteckquerschnitt ist

a) die Querschnittsfläche $\boldsymbol{A = b\,h}$ ein Maß für die Festigkeit und die Steifigkeit gegenüber Zug/Druck-Belastung,

b) das Widerstandsmoment $\boldsymbol{W = b\,h^2 / 6}$ ein Maß für die Festigkeit gegenüber Biegebelastung,

c) das Flächenträgheitsmoment $\boldsymbol{I = b\,h^3 / 12}$ ein Maß für die Steifigkeit gegenüber Biegeverformungen.

Aus Rohmaterial (Baumstämmen) mit kreisförmigem Querschnitt (gegeben: Durchmesser $\boldsymbol{D}$) sollen Träger mit Rechteckquerschnitt hergestellt werden. Welche Abmessungsverhältnisse $\boldsymbol{b/h}$ sind für die genannten Fälle optimal? Welche optimalen Abmessungsverhältnisse $\boldsymbol{b/h}$ erhält man, wenn das Rohmaterial halbkreisförmigen Querschnitt (gegeben: Radius $\boldsymbol{R}$) hat?

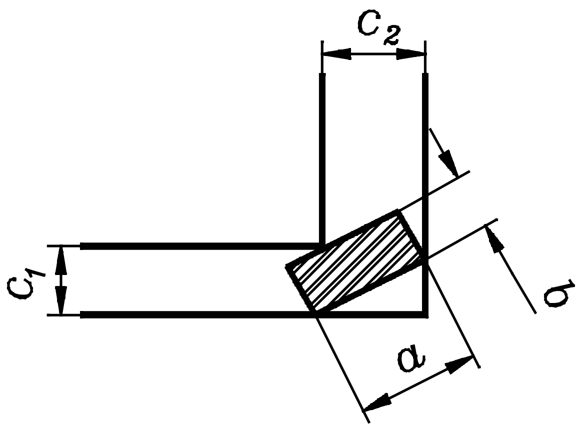
Aufgabe 3.9

Welche maximalen Abmessungen darf ein Rechteck haben, so daß es in der skizzierten Führung bewegt werden kann (Schrank wird durch einen rechtwinklig abknickenden Korridor geschoben)?

Gegeben: $\boldsymbol{c_1}$, $\boldsymbol{c_2}$.

a) Man beschreibe einen Algorithmus, nach dem die maximal mögliche Abmessung $\boldsymbol{a}$ als Funktion von $\boldsymbol{b}$ ermittelt werden kann.

b) Man berechne die maximale Abmessung $\boldsymbol{a}$ für $\boldsymbol{c_1 = 2\,m}$, $\boldsymbol{c_2 = 3\,m}$, $\boldsymbol{b = 1{,}5\,m}$.

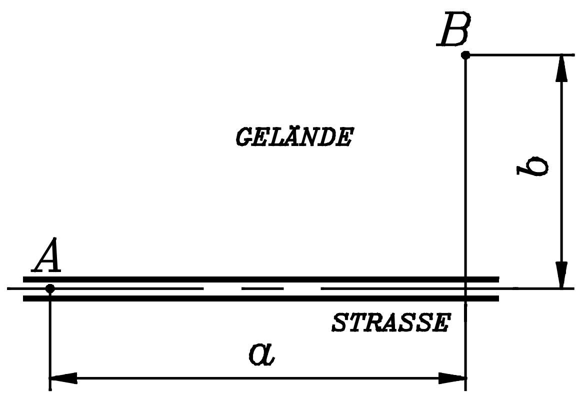


Aufgabe 3.10

Ein Fahrzeug fährt von $\boldsymbol{A}$ nach $\boldsymbol{B}$. Es kann auf der Straße eine Durchschnittsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v_1}$ erreichen, im Gelände die Durchschnittsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v_2 < v_1}$.

Gegeben: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$.

Auf welchem Weg gelangt das Fahrzeug in kürzester Zeit von $\boldsymbol{A}$ nach $\boldsymbol{B}$?



Aufgabe 3.11 Man untersuche den Verlauf folgender Funktionen (speziell sind Nullstellen, Polstellen und Asymptoten anzugeben)

$$a)\quad y = \frac{x^4 - 3x^2 + x - 5}{x^2 + x - 1} \quad ; \qquad b)\quad y = \frac{x^3 + 4x^2 - 11x - 30}{3x - 2}$$

Aufgabe 3.12 Welche Kegelschnitte werden durch die folgenden Relationen beschrieben?

$$\begin{aligned} a)&\quad 9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0\\ b)&\quad x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y + 3 = 0\\ c)&\quad 3x^2 + 5y^2 - 2x + 6y + 4 = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.13 Man bestimme die Hauptformen für die folgenden Kegelschnitte:

$$\begin{aligned} a)&\quad 2x^2 + 2y^2 + 12x - 16y = 0\\ b)&\quad 3x^2 + 2y^2 + 6x - 4y - 1 = 0\\ c)&\quad x^2 - 4y^2 - 4x - 8y - 4 = 0\\ d)&\quad y^2 + 2x - 4y - 1 = 0 \end{aligned}$$

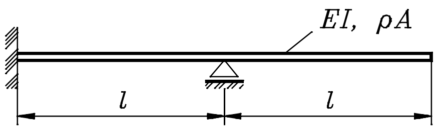
Aufgabe 3.14 Man transformiere die Kegelschnitte auf Hauptachsenform:

$$\begin{aligned} a)&\quad x^2 + y^2 - 6xy - 4x - 4y + 12 = 0\\ b)&\quad x^2 + y^2 - 2xy - 10x - 6y + 25 = 0\\ c)&\quad 4y = \frac{3x^2 - 12x + 4}{x - 2} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.15 Man zeige, daß die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen mit gleicher Frequenz (aber unterschiedlicher Amplitude und Phasenverschiebung) wieder eine Schwingung mit der gleichen Frequenz ergibt.

Aufgabe 3.16 Die "exakte" Berechnung der Eigenkreisfrequenzen des skizzierten Balkens mit der konstaten Biegesteifigkeit ***EI*** und der konstanten Massebelegung ***ϱA*** nach der Formel

$$\omega = \sqrt{\frac{EI}{\varrho A}\,\frac{\lambda^2}{l^2}}$$



(Eigenfrequenz $f = \omega / 2\pi$) erfordert zunächst die Berechnung der λ-Werte. Für den skizzierten Lagerungsfall müssen die λ-Werte eingesetzt werden, für die das folgende homogene Gleichungssystem nichttriviale Lösungen für die C_i-Werte hat:

$$\begin{bmatrix} \cos\lambda - \cosh\lambda & \sin\lambda - \sinh\lambda & 0 & 0 & 0\\ -\sin\lambda - \sinh\lambda & \cos\lambda - \cosh\lambda & 0 & -1 & -1\\ -\cos\lambda - \cosh\lambda & -\sin\lambda - \sinh\lambda & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\cos\lambda - \cosh\lambda & -\sin\lambda & \sinh\lambda\\ 0 & 0 & \sin\lambda - \sinh\lambda & -\cos\lambda & \cosh\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4\\ C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$$

Man bestimme die drei kleinsten positiven Werte für λ und die zugehörigen ω-Werte für (runder Stahlstab mit dem Durchmesser $d = 10\ mm$):

$$l = 0{,}5\ m \quad ; \quad EI = 10{,}3 \cdot 10^8\ Nmm^2 \quad ; \quad \rho A = 0{,}617\ g/mm \quad .$$