Aufgabe 4.1

$$\int \frac{3x^3 + 3x - 2}{2x^2 + 2}\,dx =$$

Aufgabe 4.2 Man berechne die Fläche, die von der ersten Halbwelle der Funktion $\boldsymbol{y = \sin x}$ und der $\boldsymbol{x}$-Achse eingeschlossen wird.

Aufgabe 4.3 Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale:

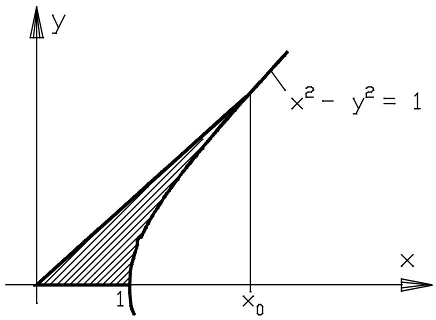
$a)$	$\int x \sin x\,dx =$	$b)$	$\int \ln x\,dx =$
$c)$	$\int \cos^2 x\,dx =$	$d)$	$\int x\,e^x\,dx =$
$e)$	$\int x^n \ln x\,dx =$	$f)$	$\int x \arctan x\,dx =$
$g)$	$\int \sqrt{3x - 2}\,dx =$	$h)$	$\int (x+2)\cosh(1+x)\,dx =$

Aufgabe 4.4 Man bestätige die Kreisflächenformel durch bestimmte Integration der Kreisgleichung.

Aufgabe 4.5

Man bestimme die Fläche, die der schraffierte "Hyperbelsektor" einnimmt (Hinweis: Die Gerade verläuft durch den Koordinatenursprung und den Schnittpunkt mit der Hyperbel bei $\boldsymbol{x_0}$, ist also keine Tangente der Hyperbel).

Gegeben: $\boldsymbol{x_0}$.



Aufgabe 4.6 Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale:

$a)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} =$	$b)$	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\,dx =$
$c)$	$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} =$	$d)$	$\int \frac{x^3 - 2}{(x^2+1)\,x^2}\,dx =$

Aufgabe 4.7 Für die Funktion $\boldsymbol{y = 1 / x^2}$ ist die Fläche unter der Kurve von $\boldsymbol{x = 1}$ bis $\boldsymbol{x = \infty}$ zu halbieren. Wo muß die Grenze gelegt werden?

Aufgabe 4.8 $a)\ \int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \ldots \qquad b)\ \int\limits_0^4 \frac{dx}{x} = \ldots \qquad c)\ \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^3} = \ldots$

Aufgabe 4.9 Für die sogenannte Laplace-Transformation muß das Integral

$$\int\limits_{t=0}^{\infty} e^{-pt} \sin \omega t\,dt = \ldots$$

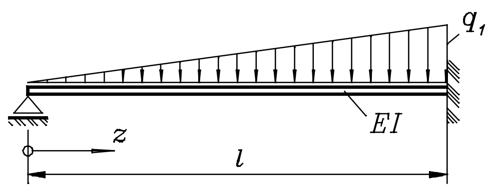
mit den (hier als konstant anzunehmenden) Werten $\boldsymbol{p > 0}$ und ω gelöst werden.

Aufgabe 4.10 Der skizzierte Biegeträger ist mit einer linear veränderlichen Linienlast (Dreieckslast mit der Maximalintensität q_1) belastet.

Für die Biegeverformung $v(z)$ gilt bei konstanter Biegesteifigkeit EI nach der linearen Biegetheorie:

$$\frac{d^2 v(z)}{dz^2} = - \frac{M_b(z)}{EI}$$

mit dem Biegemoment $M_b(z)$.



Gegeben: l, EI, q_1.

a) Man bestimme die Funktion $v(z)$ durch zweifaches Integrieren dieser Beziehung unter Beachtung der Randbedingungen: An der Einspannstelle müssen v und v', am Loslager muß v gleich Null sein.

b) Man ermittle Ort und Größe der maximalen Durchbiegung und des maximalen Biegemoments.

Aufgabe 4.11 Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz ziehen sich zwei Massen m_1 und m_2 mit der Kraft

$$F_G = \frac{m_1\, m_2}{r^2}\, G$$

an (Gravitationskonstante $G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}\, Nm^2/(kg)^2$).

Die Arbeit ("Kraft · Weg"), die geleistet werden muß, um eine Masse $m_1 = m$ von der Erde mit $m_2 = m_E = 5{,}97 \cdot 10^{24}\, kg$ bis ins "Unendliche" zu befördern, errechnet sich nach

$$W = \int\limits_{r=R}^{\infty} \frac{m\, m_E}{r^2}\, G\, dr$$

mit dem Erdradius $R = 6373\, km$.

a) Wie groß ist diese Arbeit für eine Masse $m = 1000\, kg$?

b) Durch Gleichsetzen der Arbeit W mit der kinetischen Energie $T = m v^2/2$, die dieser Masse erteilt werden muß, ist die sogenannte "Fluchtgeschwindigkeit" v zu berechnen.

Aufgabe 4.12 Für $x = 2$ ist die Funktion

$$f(x) = \frac{\sinh(2-x)}{\sqrt[3]{\cosh(2-x) - 1}}$$

nicht definiert. Man ermittle den Wert des Integrals

$$I = \int\limits_{-2}^{2} f(x)\, dx\ .$$

Aufgabe 4.13 Man berechne die Bogenlänge der Kurve $y = \cosh x$ im Intervall $-1 \le x \le 1$.

Aufgabe 4.14 Man bestätige durch bestimmte Integration die Volumenformeln für

a) einen Kegelstumpf mit der Höhe h und den beiden Deckflächendurchmessern d bzw. D,

b) ein Rotationsellipsoid, das bei Rotation einer Ellipse mit den beiden Achsen $2a$ und $2b$ um die Achse $2a$ entsteht.

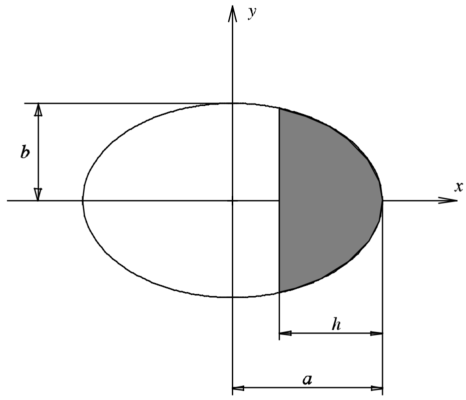
Man überprüfe die Richtigkeit der Ergebnisse durch Vergleich mit den Sonderfällen Kegel, Zylinder und Kugel.

Aufgabe 4.15 a) Man berechne die Schwerpunktkoordinaten der Fläche, die von der ersten Halbwelle der Kurve $y = a \sin bx$ und der x-Achse gebildet wird.

b) Man berechne die Oberfläche des Rotationskörpers, der entsteht, wenn die erste Halbwelle der Kurve $y = \sin x$ um die x-Achse rotiert.

Aufgabe 4.16

Ein Ellipsenabschnitt ist wie skizziert gegeben durch die Halbachsen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ und die Pfeilhöhe $\boldsymbol{h}$.

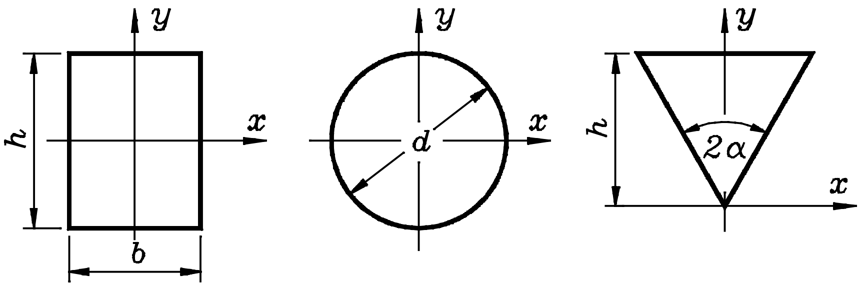


a) Man berechne die Schwerpunktkoordinate $\boldsymbol{x_S}$ des Abschnitts.

b) Es ist zu zeigen, daß die bekannte Formel für die Lage des Schwerpunkts in einem Kreisabschnitt als Sonderfall in der Lösung enthalten ist.

Aufgabe 4.17

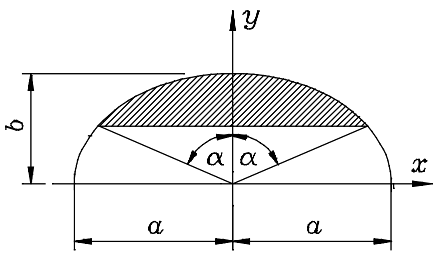
Für die skizzierten Flächen sind die Flächenträgheitsmomente $\boldsymbol{I_{xx}}$ und $\boldsymbol{I_{yy}}$ bezüglich der angegebenen Koordinatensysteme zu berechnen.



Gegeben: $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{h}$ (Breite und Höhe des Rechtecks),
$\boldsymbol{d}$ (Kreisdurchmesser),
$\boldsymbol{h}$, α (Höhe und halber Öffnungswinkel des Dreiecks).

Aufgabe 4.18

Der skizzierte Ellipsenabschnitt ist durch die Halbachsen der Ellipse und den halben Öffnungswinkel α definiert.

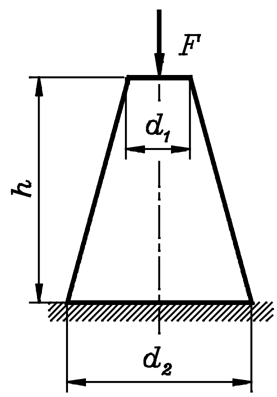


Gegeben: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, α.

Man berechne die Flächenträgheitsmomente $\boldsymbol{I_{xx}}$ und $\boldsymbol{I_{yy}}$ bezüglich des gezeichneten Koordinatensystems.

Aufgabe 4.19

Ein konischer Pfeiler trägt sein Eigengewicht (Dichte ϱ) und eine Kraft $\boldsymbol{F}$.



Gegeben: $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{d_1}$, $\boldsymbol{d_2}$, $\boldsymbol{F}$, ϱ,
$\boldsymbol{E}$ (Elastizitätsmodul).

Man berechne die Längenänderung $\Delta \boldsymbol{l}$ des Pfeilers.