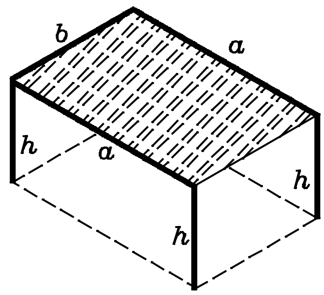
Aufgabe 5.1 Die durch die Funktion $z = x\,y$ definierte Fläche ist mit einer Ebene zu schneiden, die auf der x-y-Ebene senkrecht steht, mit der x-Achse den Winkel α bildet und die y-Achse bei $y = b$ schneidet.

a) Man zeige, daß bei gleichem Winkel α für unterschiedliche Werte b kongruente Parabeln als Schnittkurven entstehen. Die Relationen der Schnittkurven sind in einem $\bar{x}$-$\bar{z}$-Koordinatensystem anzugeben, das in der Schnittebene liegt: Die $\bar{x}$-Achse liegt außerdem in der x-y-Ebene, die $\bar{z}$-Achse in der y-z-Ebene. Man diskutiere die Sonderfälle $\alpha_1 = \pi/4$ und $\alpha_2 = 3\pi/4$.

b) Welche Schnittkurven entstehen beim Schneiden mit Ebenen, die senkrecht zu den Koordinatenachsen gerichtet sind?

c) Man skizziere die Höhenlinien für $z = 0\ ;\ \pm 1\ ;\ \pm 4\ ;\ \pm 9$.

Aufgabe 5.2 Es soll ein quaderförmiger Raum hergestellt werden aus

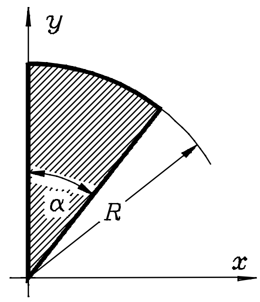


4 Pfosten der Länge h (Preis: **20** DM/m),
2 Streben der Länge a (Preis: **15** DM/m),
1 Strebe der Länge b (Preis: **15** DM/m),
einer Dachfläche $a \cdot b$ (Preis: **50** DM/m^2).

Welches maximale Volumen kann bei Materialkosten von **1000** DM umbaut werden. Welche Abmessungen hat dieser Raum?

Aufgabe 5.3 Man berechne das Volumen einer Säule mit Rechteckquerschnitt, deren Grundfläche in der x-y-Ebene durch $2 \le x \le 5$ und $1 \le y \le 3$ definiert wird, deren Seitenkanten parallel zur z-Achse verlaufen und deren Deckfläche durch Schnitt mit der Ebene $z = 2\,x + 3\,y$ entsteht?

Aufgabe 5.4



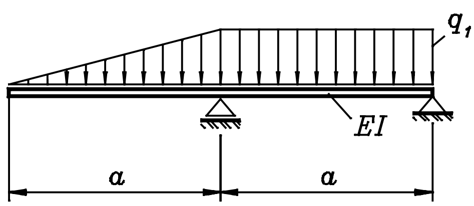
Das Deviationsmoment für Querschnittsflächen eines Biegeträgers errechnet sich nach der Formel

$$I_{xy} = -\int_A x\,y\,dA \quad .$$

Man ermittle I_{xy} für den skizzierten Kreissektor bezüglich des gezeichneten Koordinatensystems (gegeben: α , R).

Aufgabe 5.5

Man berechne die Absenkung am freien Ende des skizzierten Biegeträgers durch partielle Ableitung der Formänderungsarbeit nach einer an dieser Stelle angreifenden (fiktiven) Kraft.



Gegeben: a , q_1 , EI = **konst.**

Aufgabe 5.6 Ein Dreieck ist durch die Seitenlängen $b = 4\ cm$ und $c = 7\ cm$ und dem von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkel $\alpha = 40°$ gegeben. Man berechne die Dreiecksfläche A und näherungsweise (mit dem totalen Differential) die Flächenänderung ΔA, wenn sich b um **2** mm und c um **3** mm vergrößern und der Winkel α sich um **1°** verkleinert. Man vergleiche mit der tatsächlichen Flächenänderung.

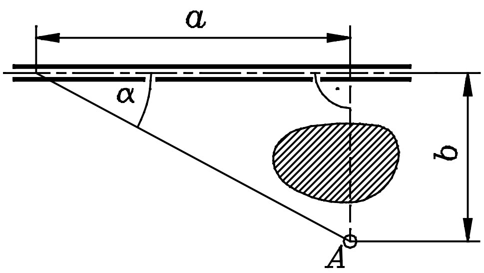
Aufgabe 5.7 Man lege $\boldsymbol{n}$-mal ein Lineal beliebig an, um die Breite $\boldsymbol{b}$ eines DIN-A4-Blattes zu messen, und lese jeweils den Skalenwert links und rechts ab (man vermeidet so, sich durch die Ergebnisse vorangegangener Ablesungen beeinflussen zu lassen). Dabei sind Bruchteile der ***mm***-Skala zu schätzen.

Aus der Meßreihe der durch Differenzbildung entstehenden $\boldsymbol{b_i}$ -Werte sind der Mittelwert, der maximale Fehler der Einzelmessung, der mittlere Fehler der Einzelmessung und der mittlere Fehler des Mittelwertes zu bestimmen. Man schätze "gefühlsmäßig" ein, ob diese Fehler die tatsächliche Genauigkeit des Meßwertes charakterisieren.

Aufgabe 5.8 Der kürzeste (rechtwinklige) Abstand des Punktes $\boldsymbol{A}$ von der Straße wird durch Peilung und Messung bestimmt:

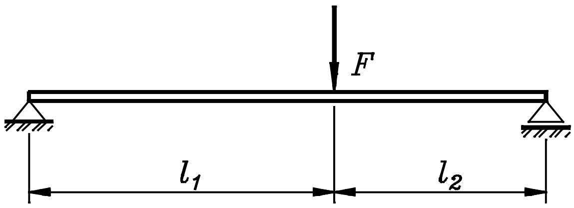
$$a = (154 \pm 2)\ m\ ,$$
$$\alpha = (\ 35 \pm 1)\ °\ .$$

Man ermittle $\boldsymbol{b}$ und den maximalen sowie den mittleren Fehler des Ergebnisses.



Aufgabe 5.9 Ein Biegeträger mit konstantem Rechteckquerschnitt (Breite $\boldsymbol{b}$ und Höhe $\boldsymbol{h}$) ist wie skizziert gelagert und belastet. Für die Durchbiegung an der Lastangriffsstelle gilt die Formel

$$v = \frac{4\,F\,l_1^2\,l_2^2}{E\,b\,h^3\,(l_1 + l_2)}$$



Geg.: $F = (240 \pm 2)\ N$;
$l_1 = (40 \pm 0{,}3)\ cm$; $l_2 = (60 \pm 0{,}3)\ cm$;
$E = (2{,}1 \cdot 10^5 \pm 0{,}05 \cdot 10^5)\ N/mm^2$.

Die Querschnittsabmessungen wurden an unterschiedlichen Stellen des Trägers ermittelt. Es liegen die folgenden Meßreihen vor:

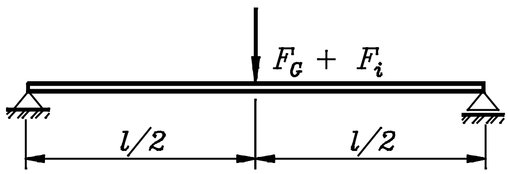
i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
b **[*mm*]**	**8,3**	**8,6**	**8,6**	**8,4**	**8,5**	**8,4**
h **[*mm*]**	**17,1**	**17,2**	**17,2**	**16,9**	**16,6**	**16,8**

a) Man ermittle für die beiden Meßreihen für $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{h}$ jeweils den Mittelwert, den mittleren Fehler der Einzelmessung und den mittleren Fehler des Mittelwertes.

b) Unter Verwendung der unter a) ermittelten Mittelwerte und der mittleren Fehler der Mittelwerte sind $\boldsymbol{v}$ und der mittlere Fehler für $\boldsymbol{v}$ nach nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz zu berechnen.

Aufgabe 5.10 Für einen Kranbahnträger der Länge $\boldsymbol{l = 10\ m}$ soll experimentell die Biegesteifigkeit $\boldsymbol{EI}$ ermittelt werden. Dazu werden Verformungsmessungen ausgeführt: In Trägermitte wird eine Lastanhängung mit unbekanntem Gewicht $\boldsymbol{F_G}$ montiert, auf die nacheinander die Zusatzlasten $\boldsymbol{F_i}$ aufgebracht werden. Die Durchbiegungen $\boldsymbol{w_i}$ in Trägermitte aus $(\boldsymbol{F_G + F_i})$ werden gemessen. Man ermittle $\boldsymbol{EI}$ und $\boldsymbol{F_G}$.

$\boldsymbol{F_i}$ **[*kN*]**	**0**	**10**	**20**	**50**
$\boldsymbol{w_i}$ **[*mm*]**	**2**	**4**	**10**	**17**



Aufgabe 5.11 Die Auswertung von Videoaufnahmen der Flugbahn einer Kugel beim Kugelstoßen ergab folgende Punktkoordinaten:

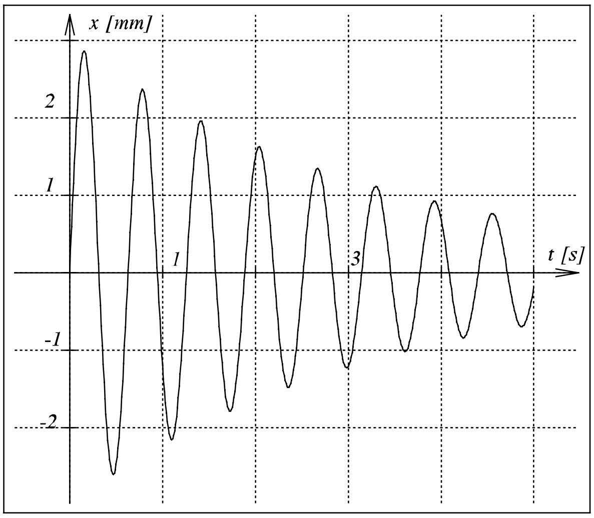
***x*[*m*]**	**0**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**
***y*[*m*]**	**2,00**	**3,65**	**4,93**	**5,84**	**6,38**	**6,56**	**6,37**	**5,81**	**4,88**	**3,58**	**1,91**

Da der Luftwiderstand vernachlässigt werden kann, ist die Flugbahn eine quadratische Parabel.

a) Man ermittle die Gleichung der Parabel.
b) Wie groß sind Abwurf- und Auftreffwinkel (bei $\boldsymbol{x = 0}$ bzw. $\boldsymbol{y = 0}$)?
c) Wo liegt der Scheitelpunkt der Flugbahn?

Aufgabe 5.12

Eine freie gedämpfte Schwingung mit $\omega = \mathbf{10}\ \boldsymbol{s^{-1}}$ (Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Schwingers) ist durch den nebenstehenden Meßschrieb gegeben, dem näherungsweise die Amplituden der Schwingung entnommen wurden, die in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt sind.



Mit der Phasenverschiebung $\alpha = \pi/2$ kann der zeitliche Ablauf theoretisch durch folgende Funktion beschrieben werden, die als Grundlage für die Ermittlung einer Ausgleichsfunktion verwendet werden soll (***D*** ist das dimensionslose Lehrsche Dämpfungsmaß):

$$x(t) = C\, e^{-D\omega t} \cos\left(\sqrt{1 - D^2}\,\omega t - \alpha\right)$$

***t* [*s*]**	**0,15**	**0,47**	**0,78**	**1,10**	**1,41**	**1,73**	**2,04**	**2,35**
***x* [*mm*]**	**2,85**	**- 2,60**	**2,35**	**- 2,15**	**1,95**	**- 1,80**	**1,65**	**- 1,50**

Aufgabe 6.1 Von 7 möglichen Prüfungsthemen werden 4 in der Prüfung tatsächlich abgefragt. Ein Student bereitet sich auf 3 Themen vor. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er damit auf mindestens 2 der in der Prüfung abgefragten Themen vorbereitet ist?

Aufgabe 6.2 Eine Fußballmannschaft (**15** Personen einschließlich Trainer und Ersatzspieler) feiert den Sieg in einer Kneipe. Drei Spieler und der Trainer trinken so viel, daß ihr Blutalkoholspiegel größer als **0,8‰** ist. Alle **15** Personen fahren mit eigenen Autos nach Hause. Eine Polizeistreife stoppt **4** Autos und läßt die Fahrer "ins Röhrchen pusten". Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie

a) alle "Trinker", b) mindestens **2**, c) den Trainer, d) gar keinen erwischen?

Aufgabe 6.3 Im Fachbereich Maschinenbau sollten stets 2 funktionstüchtige Kopierer zur Verfügung stehen. Die Erfahrung zeigt, daß die Geräte eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 2% haben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die oben genannte Bedingung nicht erfüllt ist, wenn 3 Kopierer vorhanden sind?

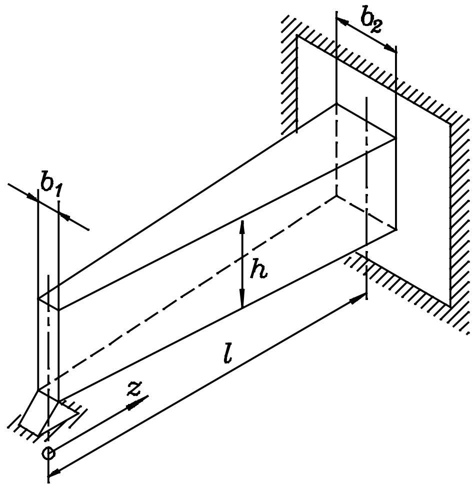
Aufgabe 6.4 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einer Gruppe von *N* Personen zwei am gleichen Tag Geburtstag haben (das "Schaltjahrproblem" darf vernachlässigt werden)?

Aufgabe 6.5 Es wurde statistisch festgestellt, daß im Mittel 8% der Studenten zum Informatik-Praktikum nicht erscheinen. Es wurde deshalb vorgeschlagen, daß sich für 64 Plätze insgesamt 69 Studenten eintragen dürfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß jeder Erscheinende einen Platz erhält?

Aufgabe 7.1 Das Prinzip vom Minimum des elastischen Potentials kann für Träger, deren Verformung ausschließlich aus Biegemomenten herrührt, in der Form

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l EI(z)\, v^{\prime\prime 2}(z)\, dz - W_a \quad \Rightarrow \quad \textit{Minimum}$$

formuliert werden. Hierin ist EI die Biegesteifigkeit, $v(z)$ die Biegelinie und W_a die sogenannte "Endwertarbeit" der äußeren Belastung (für eine Einzelkraft: Kraft · Endwert der Verschiebung am Kraftangriffspunkt).



Der skizzierte Träger ist nur durch sein Eigengewicht belastet. Sein rechteckiger Querschnitt hat konstante Höhe, die Breite ändert sich linear.

Geg.: l, h, b_1, b_2, Elastizitätsmodul E, Dichte ϱ.

Die Durchbiegungsfunktion $v(z)$ ist näherungsweise zu ermitteln, indem zwei Ansatzfunktionen $v_1(z)$ und $v_2(z)$, die die geometrischen Randbedingungen erfüllen, in der Form

$$\tilde{v}(z) = a_1\, v_1(z) + a_2\, v_2(z)$$

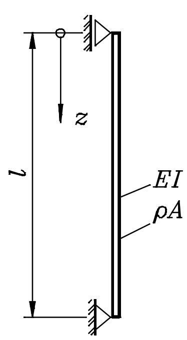
in die Formel für das elastische Potential eingesetzt werden. Dann sind die Parameter a_1 und a_2 so zu bestimmen, daß der mit diesen Ansatzfunktionen noch mögliche minimale Wert für das elastische Potential erreicht wird (Verfahren von Ritz).

Empfehlungen für die Wahl der Ansatzfunktionen $v_1(z)$ und $v_2(z)$:

- Allgemeines Polynom dritten Grades, dessen Koeffizienten so bestimmt werden, daß das Polynom die geometrischen Randbedingungen erfüllt,
- Biegelinie für einen Träger mit gleicher Lagerung, aber eventuell anderer Belastung und anderer Querschnittsform (kann z. B. einem Maschinenbau-Taschenbuch entnommen werden).

Aufgabe 7.2 Für Knickstäbe lautet das Prinzip vom Minimum des elastischen Potentials:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l \left[EI(z)\, v^{\prime\prime 2}(z) + F_N(z)\, v^{\prime 2}(z) \right] dz \quad \Rightarrow \quad \textit{Minimum}$$



mit der Normalkraft F_N. Für den skizzierten Stab mit konstantem Querschnitt, der nur durch sein Eigengewicht (konstante Dichte ϱ) belastet ist, soll näherungsweise die kritische Länge ermittelt werden (Länge, bei der der Stab infolge seines Eigengewichts seitlich ausknickt).

Dazu ist nach dem Ritzschen Verfahren (vgl. vorige Aufgabe) ein zweigliedriger Ansatz mit den folgenden Funktionen anzusetzen:

$$v_1(z) = z\,(l - z) \;,$$
$$v_2(z) = z^2\,(l - z)^2 \;.$$

Geg.: $E = 2{,}1 \cdot 10^5\ N/mm^2$; $\varrho = 7{,}85\ g/cm^3$; $d = 20\ mm$ (Durchmesser des Kreisquerschnitts).