

Numerische Methoden

Vorlesung und Praktikum

Inhalt

1	Funktionsauswertung, graphische Darstellung	2
1.1	Arbeiten mit dimensionslosen Größen	2
1.2	Darstellung von Funktionen mit CAMMPUS	4
1.2.1	Funktionen, die nur bereichsweise aufschreibbar sind	4
1.2.2	Funktionen in Parameterdarstellung	7
1.2.3	Funktionen, definiert mit Polarkoordinaten	9
	Aufgaben	10
2	Ergebnisse verifizieren	12
	Aufgaben	14
3	Differenzenverfahren	15
3.1	Zentrale Differenzenformeln	16
3.2	Biegelinie des geraden Trägers	17
	Aufgaben	19
4	Die Methode der finiten Elemente	21
4.1	Diskretisierung, Elemente und Knoten	22
4.2	Reduktion der Elementlasten	25
4.3	Trennung der inneren Kraftgrößen von der äußeren Belastung	26
4.4	Die Elementsteifigkeitsmatrix, Reduktion von Elementlasten	28
4.5	Systemsteifigkeitsbeziehung, Berechnung der Knotenverschiebungen	34
4.5.1	Rechnerinternes Modell	34
4.5.2	Aufbau der Systemsteifigkeitsbeziehung	36
4.5.3	Lösung des linearen Gleichungssystems, Bandweitenproblem	42
4.6	FEMSET und CAMMPUS	45
4.6.1	Der "Finite-Elemente-Baukasten" FEMSET	45
4.6.2	FEM-Programme in CAMMPUS	46
4.6.3	Spezielle Elementsteifigkeitsbeziehungen für Scheibenelemente	48
	Aufgaben	50
5	Numerische Integration von Anfangswertproblemen	56
5.1	Das Verfahren von EULER-CAUCHY	56
5.2	Differentialgleichungen höherer Ordnung, Differentialgleichungssysteme	60
5.3	Verbesserte Integrationsformeln	63
5.3.1	Prädiktor-Korrektor-Verfahren, das Verfahren von HEUN	63
5.3.2	RUNGE-KUTTA-Verfahren, Realisierung in CAMMPUS	65
5.3.3	RUNGE-KUTTA-NYSTRÖM-Verfahren im Programm MOTION	69
	Aufgaben	75

1 Funktionsauswertung, graphische Darstellung

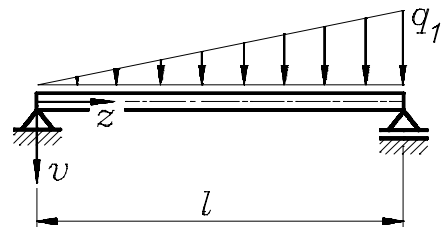
Die graphische Darstellung von Funktionen und ihren Ableitungen und die Ermittlung spezieller Funktionswerte (z. B.: Nullstellen, Extremwerte, ...) ist eine Aufgabe, die sich dem Ingenieur auf sehr vielen Gebieten stellt. Hier werden zunächst nur Funktionen mit einer unabhängigen Variablen betrachtet, die folgendermaßen definiert sein können:

- ◆ Explizite Darstellung mit kartesischen Koordinaten: $y = y(x)$,
- ◆ Explizite Darstellung mit Polarkoordinaten: $r = r(\varphi)$,
- ◆ Parameter-Darstellung: $x = x(t)$,
 $y = y(t)$,
- ◆ Wertetabelle mit n x - y -Wertepaaren.

1.1 Arbeiten mit dimensionslosen Größen

In der Mathematik-Ausbildung werden unabhängige und abhängige Variablen üblicherweise als dimensionslose Größen betrachtet. Damit werden dann auch alle Ableitungen dimensionslos.

In der Ingenieur-Mathematik haben die Variablen einer Funktion in der Regel sogar unterschiedliche Dimensionen, und bei der Ableitung nach einer dimensionsbehafteten unabhängigen Variablen ändert sich die Dimension der abhängigen Variablen, z. B. wird aus der Funktion für den Biegemomentenverlauf des skizzierten Trägers



$$M_b = \frac{1}{6} q_1 l^2 \left[\frac{z}{l} - \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right]$$

mit einem Biegemoment der Dimension "Kraft · Länge" beim Bilden der ersten Ableitung nach z (mit der Dimension einer Länge) der Querkraftverlauf

$$F_Q = \frac{dM_b}{dz} = \frac{1}{6} q_1 l \left[1 - 3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 \right],$$

in dem F_Q die Dimension einer Kraft hat.

Es kann (im Vergleich mit der dimensionslosen "heilen Welt" der Schulmathematik) ausgesprochen lästig sein, die Dimensionsbetrachtungen durch die gesamte Berechnung zu ziehen, zumal bei praktischen Problemen im allgemeinen noch Umrechnungen erforderlich sind, wenn z. B. (typischer Fall für eine Verformungsberechnung) die Belastung in kN , die Abmessungen in m und der Elastizitätsmodul in N/mm^2 gegeben sind.

Der Ingenieur ist deshalb gut beraten, wenn er seine Ergebnisse konsequent "dimensionslos macht", bevor er sie weiterverarbeitet. Dies soll am Beispiel einer Biegelinie und den daraus durch Differenzieren zu gewinnenden Biegemoment- und Querkraftverläufen demonstriert werden.

Für den auf der vorigen Seite skizzierten Träger gilt die Biegelinie (vgl. "Dankert/Dankert: Technische Mechanik", computerunterstützt, Seite 244):

$$v = \frac{q_1 l^4}{360 EI} \left[7 \frac{z}{l} - 10 \left(\frac{z}{l} \right)^3 + 3 \left(\frac{z}{l} \right)^5 \right], \quad 0 \leq z \leq l .$$

Sie hat in dieser Form schon eine "dimensionslose eckige Klammer" (z ist eine Längenkoordinate), so daß es naheliegend ist, auf eine dimensionslose Koordinate

$$\bar{z} = \frac{z}{l}, \quad 0 \leq \bar{z} \leq 1$$

überzugehen. Man geht noch einen Schritt weiter, indem man alle dimensionsbehafteten Größen vor der eckigen Klammer auf die linke Seite bringt und den dann dort entstehenden Ausdruck zur "**Dimensionslosen Verschiebung** \bar{v} " erklärt:

$$\frac{EI}{q_1 l^4} v = \frac{1}{360} \left[7 \frac{z}{l} - 10 \left(\frac{z}{l} \right)^3 + 3 \left(\frac{z}{l} \right)^5 \right], \quad 0 \leq z \leq l$$

↓

$$\bar{v} = \frac{1}{360} (7 \bar{z} - 10 \bar{z}^3 + 3 \bar{z}^5), \quad 0 \leq \bar{z} \leq 1$$

Die Funktion $\bar{v}(\bar{z})$ verknüpft nun zwei dimensionslose Größen miteinander und sollte in dieser Form weiterverarbeitet, analysiert, graphisch dargestellt werden. Mit dieser Darstellungsform ist auch noch ein weiterer Vorteil verbunden: Die Funktion $\bar{v}(\bar{z})$ ist unabhängig von Belastung, Länge und Biegesteifigkeit des Trägers. Erst am Ende aller Berechnungen kehrt man wieder zu den dimensionsbehafteten Größen

$$v = \frac{q_1 l^4}{EI} \bar{v} \quad \text{und} \quad z = l \bar{z}$$

zurück.

Es muß noch geklärt werden, was aus den "dimensionsbehafteten Ableitungsformeln" wie z. B.

$$M_b = -EI \frac{d^2 v}{dz^2} \quad \text{oder} \quad F_Q = \frac{dM_b}{dz}$$

beim Übergang auf dimensionslose Koordinaten wird. Allgemein gilt bei der Koordinatentransformation $\bar{z} = z/l$ (Kettenregel):

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{d\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{dz} = \frac{1}{l} \frac{dy}{d\bar{z}}$$

und dementsprechend für die zweite Ableitung:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{l^2} \frac{d^2 y}{d\bar{z}^2} .$$

Damit wird z. B. aus der "Biegemoment-Formel":

$$M_b = -EI \frac{d^2 v}{dz^2} = -EI \frac{1}{l^2} \frac{d^2}{d\bar{z}^2} \left(\frac{q_1 l^4}{EI} \bar{v} \right) = -q_1 l^2 \frac{d^2 \bar{v}}{d\bar{z}^2} ,$$

und nach Division durch die dimensionsbehafteten Größen der rechten Seite kann man zum "**Dimensionslosen Biegemoment**" übergehen:

$$\frac{M_b}{q_1 l^2} = - \frac{d^2 \bar{v}}{d\bar{z}^2} \quad \Rightarrow \quad \bar{M}_b = - \frac{d^2 \bar{v}}{d\bar{z}^2} \quad \text{mit} \quad \bar{M}_b = \frac{M_b}{q_1 l^2} .$$

Auf entsprechendem Weg kommt man zur "**Dimensionslosen Querkraft**":

$$\frac{F_Q}{q_1 l} = \frac{d\bar{M}_b}{d\bar{z}} \quad \Rightarrow \quad \bar{F}_Q = \frac{d\bar{M}_b}{d\bar{z}} \quad \text{mit} \quad \bar{F}_Q = \frac{F_Q}{q_1 l} .$$

Daß dies immer "so schön aufgeht", ist natürlich kein Zufall, im Gegenteil: Wenn es nicht funktioniert, ist dies ein sicheres Indiz für eine falsche Funktion.

Man beachte den erheblichen Vorteil nach dem Übergang auf dimensionslose Größen: Man rechnet hinsichtlich der Dimensionen so sorglos wie in der Schulmathematik mit einer noch dazu einfacheren Funktion $\bar{v}(\bar{z})$ in einem "normierten Bereich" und sogar vereinfachten Ableitungsformeln (alles, was eine Dimension hatte, ist verschwunden, sogar das EI in der Biegemoment-Formel).

1.2 Darstellung von Funktionen mit CAMMPUS

Das CAMMPUS-Programm "Taschenrechner MCALCU" kann für die Darstellung von Funktionen genutzt werden (ausführlich dokumentiert in "Dankert/Dankert: Technische Mechanik, computerunterstützt" ab Seite 684). Numerisch können Nullstellen und Extremwerte ermittelt werden, Ableitungen werden ebenfalls numerisch berechnet (mit den Formeln, die im Kapitel 2 dieser Vorlesung behandelt werden).

1.2.1 Funktionen, die nur bereichsweise aufschreibbar sind

Für das spezielle Problem, daß die Funktionen z. B. für Biegelinien, Biege- und Querkraftverläufe nur bereichsweise aufgeschrieben werden können, weil Unstetigkeiten in den Funktionen selbst oder ihren Ableitungen auftreten, bietet das Programm MCALCU folgende Lösungsmöglichkeit:

- ◆ Zunächst müssen die Funktionen für alle Bereiche auf ein einheitliches Koordinatensystem transformiert werden, wenn sie nicht schon in dieser Form gegeben sind.

- ◆ Danach werden alle Funktionen mit den speziell dafür vorgesehenen "An- und Abschaltfunktionen" **SWON** ("Switch on") und **SWOFF** ("Switch off") multipliziert, so daß sie nur in ihrem Gültigkeitsbereich von Null verschiedene Werte liefern. Dann können sie zu einer Funktion addiert werden, die von MCALCU ausgewertet und graphisch dargestellt werden kann.

Definition der Funktionen SWON und SWOFF:

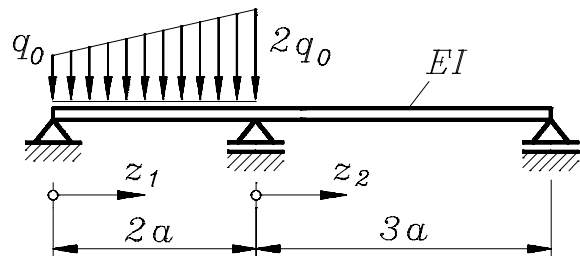
$$\begin{aligned} \text{swon}(x) &= 0 \quad \text{für } x < 0, & \text{swon}(x) &= 1 \quad \text{für } x \geq 0, \\ \text{swoff}(x) &= 1 \quad \text{für } x < 0, & \text{swoff}(x) &= 0 \quad \text{für } x \geq 0. \end{aligned}$$

Der "Schaltvorgang" erfolgt also, wenn das Argument den Wert Null hat. Wenn an der Stelle x_1 "geschaltet" werden soll, muß als Argument dementsprechend $x - x_1$ eingesetzt werden. Eine Funktion, die nur in einem bestimmten Intervall gelten soll, muß am Beginn des Intervalls "angeschaltet" und am Intervallende "abgeschaltet" werden.

Beispiel:

Die Biegelinie für den skizzierten Träger mit konstanter Biegesteifigkeit und linear veränderlicher Linienlast kann nur bereichsweise aufgeschrieben werden.

Man berechnet nach der linearen Biegetheorie der Technischen Mechanik bei gegebenen Werten für a , q_0 und EI (mit einiger Mühe):



$$\begin{aligned} v_1(z_1) &= \frac{q_0 a^4}{1200 EI} \frac{z_1}{a} \left[464 - 236 \left(\frac{z_1}{a} \right)^2 + 50 \left(\frac{z_1}{a} \right)^3 + 5 \left(\frac{z_1}{a} \right)^4 \right] \quad \text{für } 0 \leq z_1 \leq 2a, \\ v_2(z_2) &= \frac{q_0 a^4}{1350 EI} \frac{z_2}{a} \left[-414 + 207 \frac{z_2}{a} - 23 \left(\frac{z_2}{a} \right)^2 \right] \quad \text{für } 0 \leq z_2 \leq 3a. \end{aligned}$$

Zunächst werden beide Funktionen mit

$$\begin{aligned} z_1 &= z, \\ z_2 &= z - 2a \end{aligned}$$

auf eine einheitliche z -Koordinate (beginnend am linken Trägerrand) transformiert, gleichzeitig wird mit

$$\bar{z} = \frac{z}{a}, \quad \bar{v}_1 = \frac{EI}{q_0 a^4} v_1 \quad \text{und} \quad \bar{v}_2 = \frac{EI}{q_0 a^4} v_2$$

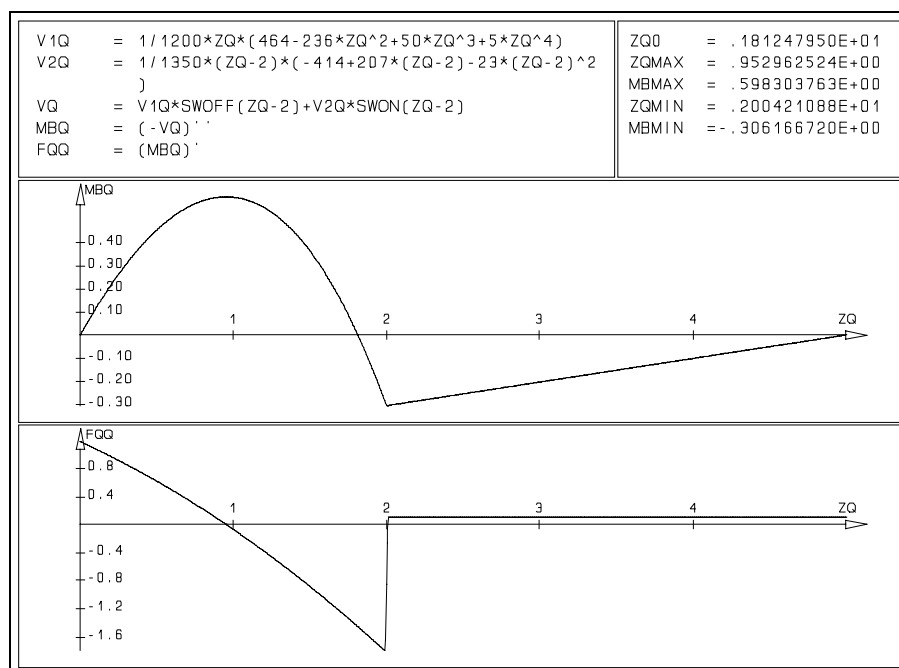
der Übergang zu einer dimensionslosen Koordinate und dimensionslosen Verschiebungen durchgeführt:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1(\bar{z}) &= \frac{1}{1200} \bar{z} [464 - 236 \bar{z}^2 + 50 \bar{z}^3 + 5 \bar{z}^4] \quad \text{für } 0 \leq \bar{z} \leq 2, \\ \bar{v}_2(\bar{z}) &= \frac{1}{1350} (\bar{z} - 2) [-414 + 207 (\bar{z} - 2) - 23 (\bar{z} - 2)^2] \quad \text{für } 2 \leq \bar{z} \leq 5. \end{aligned}$$

Im CAMMPUS-Programm MCALCU wird zweckmäßigerweise ein "Satz von Funktionen" definiert (Funktionen dürfen in ihrer Definition vorab definierte Funktionen enthalten). Eine über die gesamte Trägerlänge geltende Funktion \bar{v} wird darin als Summe der beiden Funktionen \bar{v}_1 und \bar{v}_2 aufgeschrieben, die durch geeignete Multiplikation mit den speziellen Funktionen SWON und SWOFF nur in ihrem jeweiligen Definitionsbereich von Null verschiedene Werte annehmen können.

Die nachfolgende HPGL-Ausgabe des Programms MCALCU zeigt links oben die definierten Funktionen. Als unabhängige Variable wurde ZQ ("z-quer") eingestellt. Nach der Definition der Verschiebungsfunktionen sieht man noch die Definition des dimensionslosen Biegemoments (als negative zweite Ableitung der dimensionslosen Verschiebungsfunktion) und die Definition der dimensionslosen Querkraft (als Ableitung des Biegemoments). Graphisch dargestellt wurden nur die beiden dimensionslosen Schnittgrößenverläufe.

Für den Biegemomentenverlauf wurde zusätzlich die "Berechnung aller speziellen Funktionswerte" gefordert. Im Fenster rechts oben sieht man die Koordinate des Nulldurchgangs ZQ0 sowie die Koordinaten und die zugehörigen Funktionswerte des Maximums bzw. Minimums des dimensionslosen Biegemoments:



- ◆ Die Verschiebungsfunktion wurde definiert, indem die im linken Bereich gültige Funktion bei $ZQ = 2$ "abgeschaltet" und die im rechten Bereich gültige Funktion an diesem Punkt "angeschaltet" wird. Die "noch sauberer" erscheinende Möglichkeit, die im linken Bereich gültige Funktion bei $ZQ = 0$ erst anzuschalten und die im rechten Bereich gültige Funktion bei $ZQ = 5$ abzuschalten, ist nicht zu empfehlen, wenn die (numerisch zu bildenden) Ableitungen benötigt werden. Weil dafür die Werte an dicht benachbarten Punkten zu berechnen sind, würden die Ableitungen für die Randpunkte ungenau werden. Da die Funktionen ohnehin nur im Bereich von $ZQ = 0$ bis $ZQ = 5$ dargestellt werden, haben die Funktionswerte außerhalb des Gültigkeitsbereichs keine Bedeutung.

- ◆ **Ableitungen** von Funktionen sind in MCALCU **nur durch Einklammern der gesamten rechten Seite** zu definieren (das Minuszeichen bei der Definition des dimensionslosen Biegemoments mußte deshalb mit in die Klammer hineingenommen werden). Dies ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, weil gegebenenfalls der abzuleitende Teil als eigenständige Funktion definiert werden kann, die dann in einer nachfolgenden Funktionsdefinition zu verwenden ist.

1.2.2 Funktionen in Parameterdarstellung

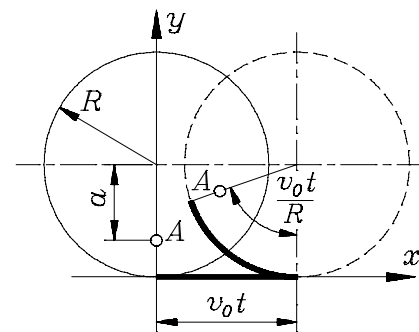
Funktionen, die in Abhängigkeit von einem Parameter t in der Form

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$$

gegeben sind, werden wegen des "wesentlich höheren Informationsgehalts", wenn dem Parameter eine sinnvolle Bedeutung zukommt, in der Ingenieur-Mathematik bevorzugt verwendet. Die Beschreibung von Bewegungen, die fast ausschließlich in dieser Form erfolgt, enthält die komplette Information über den zeitlichen Ablauf (und damit auch über Geschwindigkeit und Beschleunigung) und die Bahnkurve.

Beispiel: Für ein Rad mit dem Radius R , das schlupffrei (ohne zu gleiten) mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 auf der Horizontalen rollt, gilt für einen Punkt A im Abstand a vom Radmittelpunkt das Bewegungsgesetz

$$\begin{aligned} x &= v_0 t - a \sin \frac{v_0 t}{R}, \\ y &= R - a \cos \frac{v_0 t}{R}. \end{aligned}$$

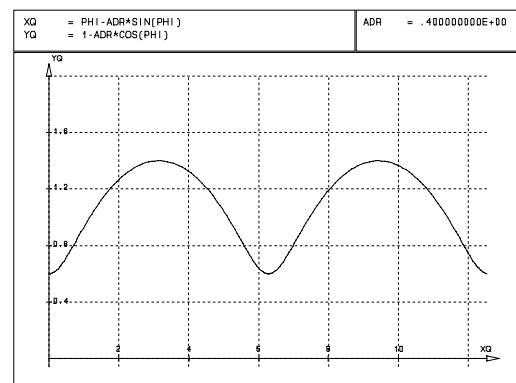


Zur Wiederholung des im Abschnitt 1.1 behandelten Arbeitens mit dimensionslosen Größen soll auch dieses Bewegungsgesetz zunächst dimensionslos gemacht werden. Die Argumente der Winkelfunktionen sind (zwingend) ohnehin dimensionslos, als "dimensionsloser Parameter" bietet sich deshalb

$$\varphi = \frac{v_0 t}{R}$$

an, zumal dieser Wert sogar anschaulich als "Rollwinkel" (siehe Skizze) gedeutet werden kann. Nach Division beider Gleichungen durch R ist das Ziel bereits erreicht:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \varphi - \frac{a}{R} \sin \varphi, \\ \bar{y} &= 1 - \frac{a}{R} \cos \varphi. \end{aligned}$$



Dies ist die Parameterdarstellung (Parameter ist jetzt φ) der Bahnkurve des Punktes A . Das (mit MCALCU erzeugte) Bild zeigt die Kurve für $a/R = 0,4$.

An einem besonders einfachen Beispiel soll gezeigt werden, wie Kurven, die in Parameterdarstellung gegeben sind, mit dem CAMMPUS-Programm MCALCU dargestellt werden können.

Beispiel: Ein Punkt führt in zwei zueinander senkrechten Ebenen Schwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen aus (so etwas läßt sich mit einem Oszillographen besonders schön darstellen). Seine Bewegung wird beschrieben durch

$$x = \cos(7t) \quad , \quad y = \sin(9t) \quad .$$

Die Funktionen werden in MCALCU über das Menüangebot "**f(x) ...**" definiert. Der nachfolgende Bildschirm-Schnappschuß zeigt die Eingabe von **x(t)**, nachdem vorher über das Angebot **Shift-F5** (zu sehen im Fenster links oben) die unabhängige Variable **T** eingestellt wurde (wird rechts unten angezeigt):

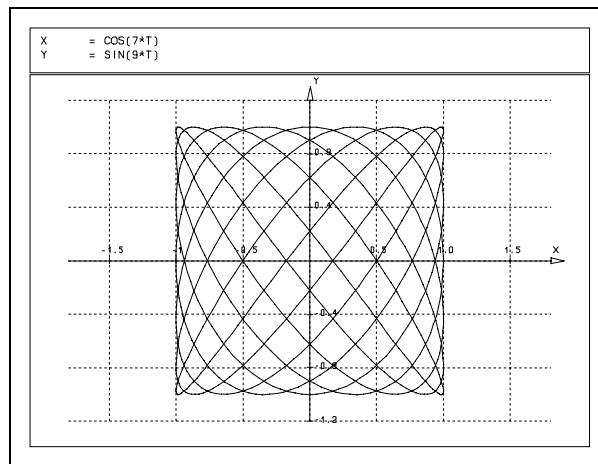
J. Dankert		"Taschenrechner"		MCALCU 1.4	Konsttn./Variabl.: 2
Return	-	Funktionsdefinition abschliessen			PI = 3.141592654
F5	-	Funktion eingeben, weitere Funktion ...			E = 2.718281828
Shift-F5	-	Andere unabhängige Variable			
TAB	-	Wechsel ins Konsttn./Variabl.-Feld			
ESC	-	Funktionsdefinition abbrechen			
x = cos (7 * t)					
sin	cos	tan	cot	Grad/Rad	Definition einer Funktion =====
asin	acos	atan	acot	Demo	
sinh	cosh	tanh	coth	fak	
asinh	acosh	atanh	acoth	Spez.Fu.	
exp	x^y	ln	lg	sqrt	
					Syntax: NAME = AUSDRUCK
					Unabhängige Variable: T

Es sind aus der Sicht des Programms nun zwei voneinander unabhängige Funktionen definiert worden, im Menü, das nach der Wahl der Option "**Graphik/Wertetb.**" des Menüangebots "**f(x) ...**" erscheint, wird auch noch vermutet, daß die Darstellung in Abhängigkeit von **T** gewünscht wird. Der folgende Bildschirm-Schnappschuß zeigt, wie "auf Parameterdarstellung umgestellt wird":

Wertetabelle, graphische Darstellung =====					RADIAN Einstellung richtig? Aendern: Grad/Radian	
Ausgabe auf Bildschirm						
Abszissenachse in Graphik-Fenstern (wenn nicht durch "A" geaendert): T						
*** Ausgabe: ***						
					Werte- Graphik-Fenster	
					Tab. 1 2 3 4	
J -->	Funktion ausgeben	Koord.-S.		J		
N -->	Funktion nicht ausgeben	Raster		J		
A -->	Variable fuer Abszissenachse	X	J	A		
0 -->	Nullstellen,	Y	J	J		
S -->	Nullstellen, Extremwerte und Polstellen fuer diese (eine) Funktion (0 bzw. S in Spalte "Werte-Tab." einsetzen)					
ESC --->	Zurueck zum Menue					
Start Rechng	Bereich	Delta-T	NGRAPH	Stopp/Scroll		
Grad/Radian	NFENST	Ausgabe	Optionen	Hilfe		

Nach Wahl des Menüangebots "**Ausgabe**" erscheint die Mitteilung, daß in den Graphik-Fenstern **T** als Abszissenachse verwendet wird, **wenn dies nicht durch ein A bei einer Funktion umgestellt wurde**. Wenn bei der Funktion **X** nun ein **A** eingetragen wird, so ist in diesem Graphik-Fenster **X** die Abszissenachse. Wenn in diesem Fenster die Funktion **Y** dargestellt wird, erscheint sie nicht in Abhängigkeit von **T**, sondern in Abhängigkeit von **X**. So kann man gegebenenfalls in unterschiedlichen Fenstern die Funktionen mit unterschiedlichen Abhängigkeiten darstellen.

Der Bereich für den Parameter **T** wurde auf **0 ... 2π** eingestellt, dementsprechend mußte für die Interpretation der Winkelfunktionen auf "RADIAN" umgestellt werden. Die nebenstehende Darstellung (HPGL-Ausgabe) zeigt die Funktion.



1.2.3 Funktionen, definiert mit Polarkoordinaten

Polarkoordinaten sind mit den kartesischen Koordinaten über den einfachen Zusammenhang

$$x = r \cos \varphi \quad , \quad y = r \sin \varphi$$

verknüpft. Damit ist folgende Möglichkeit gegeben, Funktionen in Polarkoordinatendarstellung

$$r = r(\varphi)$$

mit dem CAMMPUS-Programm MCALCU zu behandeln: Man schreibt sie in der Form

$$x = r(\varphi) \cos \varphi \quad , \quad y = r(\varphi) \sin \varphi$$

auf und betrachtet sie als "Funktionen in Parameterdarstellung" (mit dem Parameter φ). Dies soll an zwei besonders einfachen Funktionen gezeigt werden.

Beispiel:

Die in Polarkoordinaten gegebenen Funktionen

$$r_1(\varphi) = 2 \cos(3\varphi)$$

und $r_2(\varphi) = r_0 e^{a\varphi}$

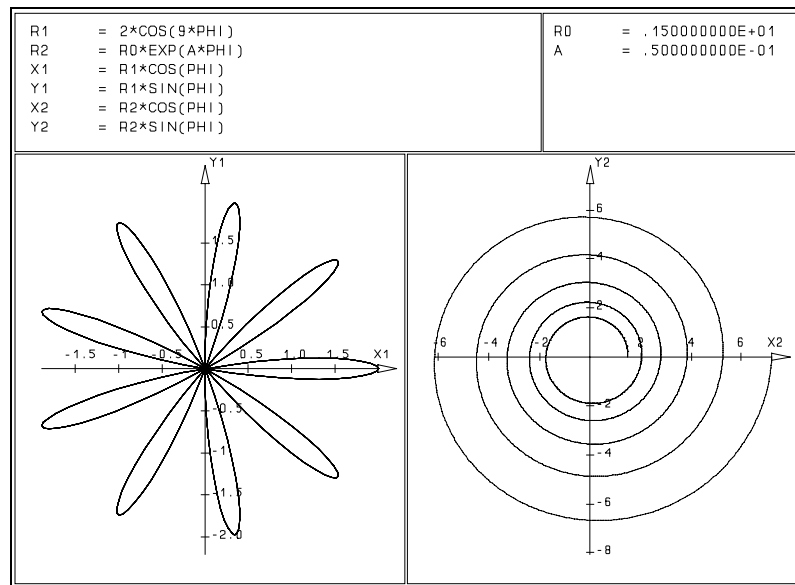
sollen (in unterschiedlichen Fenstern) graphisch dargestellt werden.

Als unabhängige Variable wird zunächst φ eingestellt. Danach werden die beiden Funktionen (wie gegeben) definiert (vorher sollten r_0 und a als Konstanten definiert werden, um die Rechnung auf möglichst einfache Weise mit anderen Werten für diese beiden Größen wiederholen zu können).

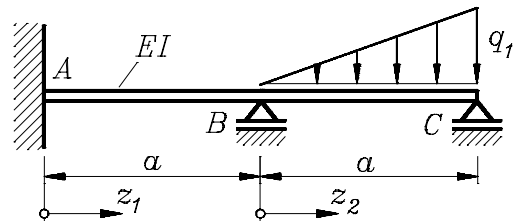
Danach werden für jede Funktion die kartesischen Koordinaten (als x_1 und y_1 bzw. x_2 und y_2) nach den oben angegebenen Formeln als Funktionen definiert. Es werden 2 graphische Ausgabefenster gefordert. Im Fenster 1 wird für die Darstellung von y_1 die Abszisse x_1 eingestellt, dementsprechend im Fenster 2 für die Darstellung von y_2 die Abszisse x_2 .

Die nebenstehende Skizze (HPGL-Ausgabe des Programms MCALCU) zeigt im linken Fenster die Funktion $r_1(\varphi)$, im rechten Fenster $r_2(\varphi)$, die sogenannte "logarithmische Spirale", gezeichnet für die Werte $a = 0,05$ und $r_0 = 1,5$.

Die Definition der Funktionen steht im Fenster oben links, die gewählten Konstanten für die logarithmische Spirale sieht man im Fenster oben rechts.



Aufgabe 1.1: Für den zweifach statisch unbestimmt gelagerten Träger mit konstanter Biegesteifigkeit und den gegebenen Größen q_1 , a , EI gelten in den beiden Bereichen die Biegelinien ("Dankert/Dankert: Technische Mechanik, computerunterstützt", Seiten 249 bis 252, man vergleiche auch die Ergebnisse mit den dort zu findenden exakten Lösungen):



$$v_1 = \frac{q_1 a^4}{120 EI} \left(\frac{z_1}{a} \right)^2 \left(\frac{z_1}{a} - 1 \right),$$

$$v_2 = \frac{q_1 a^4}{120 EI} \left(\frac{z_2}{a} \right) \left[\left(\frac{z_2}{a} \right)^4 - 4 \left(\frac{z_2}{a} \right)^2 + 2 \frac{z_2}{a} + 1 \right].$$

Gesucht:

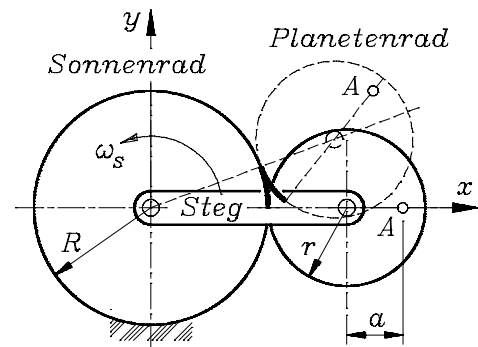
- Graphische Darstellung der Biegelinie für den gesamten Träger sowie Ort und Größe der maximalen Durchbiegung,
- graphische Darstellung der Schnittgrößenverläufe durch numerisches Differenzieren der Biegelinie,
- Größe der Lagerreaktionen durch Auswerten der Schnittgrößenverläufe.

Die graphischen Darstellungen sind für dimensionslose Verschiebungen und Schnittgrößen bei Verwendung einer dimensionslosen Längskoordinate zu erzeugen.

Aufgabe 1.2: In Polarkoordinaten ist die Funktion $r = a(1 - \cos \varphi)$ gegeben (sogenannte "Kardioide"). Die Funktion ist graphisch darzustellen, für den "höchsten Punkt" (maximaler y -Wert) sind r , φ , x und y zu ermitteln.

Aufgabe 1.3: Der Steg eines Planetengetriebes dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_s und treibt ein Planetenrad, das auf dem feststehenden Sonnenrad abrollt. Die Bewegung des Punktes A im Abstand a vom Mittelpunkt des Planetenrades wird durch folgendes Bewegungsgesetz beschrieben:

$$\begin{aligned} x(t) &= (R + r) \cos \omega_s t + a \cos[(R/r + 1) \omega_s t] , \\ y(t) &= (R + r) \sin \omega_s t + a \sin[(R/r + 1) \omega_s t] . \end{aligned}$$



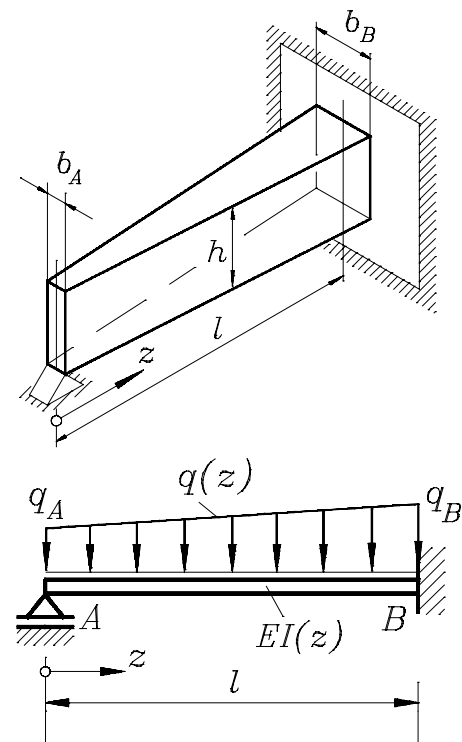
Unter Verwendung dimensionsloser Koordinaten ist die Bahnkurve des Punktes A zu zeichnen für die Abmessungsverhältnisse $R/r = 2$ und

- a) $a/r = 0,5$; b) $a/r = 1$; c) $a/r = 2$.

Aufgabe 1.4: Der skizzierte Träger mit Rechteckquerschnitt (konstante Höhe, linear veränderliche Breite) ist nur durch sein Eigengewicht belastet. Für das Breitenverhältnis $\lambda = 2$ ist die Biegelinie bekannt (siehe unten, entnommen aus "Dankert/Dankert: Technische Mechanik, computerunterstützt", Seite 270).

Gesucht:

- Graphische Darstellung der Biegelinie für den gesamten Träger sowie Ort und Größe der maximalen Durchbiegung,
- graphische Darstellung der Schnittgrößenverläufe durch numerisches Differenzieren der Biegelinie,
- Größe der Lagerreaktionen durch Auswerten der Schnittgrößenverläufe.



Die graphischen Darstellungen sind für dimensionslose Verschiebungen und Schnittgrößen bei Verwendung einer dimensionslosen Längskoordinate zu erzeugen.

Geg.: b_A ; $\lambda = b_B/b_A = 2$; E ; Dichte ρ .

$$\begin{aligned} \frac{EI_A}{q_A l^4} v(z) &= \frac{1}{72} \left(1 - \frac{z}{l}\right)^4 - \frac{1}{9} \left(1 - \frac{z}{l}\right)^3 + \frac{29 - 36 \ln 2}{72 (1 - 2 \ln 2)} \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2 \\ &\quad - \frac{11}{36 (1 - 2 \ln 2)} \left[1 - \frac{z}{l} + \left(1 + \frac{z}{l}\right) \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{2l}\right)\right] . \end{aligned}$$

2 Ergebnisse verifizieren

Nach numerischen Verfahren ermittelte Ergebnisse sind im allgemeinen Näherungen der auf analytischem Wege (wenn überhaupt möglich) zu berechnenden Werte. Dies ist kein prinzipieller Mangel der numerischen Methoden, denn auch die "exakten" Lösungen sind natürlich nur "exakt bezüglich des verwendeten mathematischen Modells".

Zum Beispiel wird für eine nach der Biegetheorie ermittelten analytischen Lösung für die Durchbiegung einer Welle vorausgesetzt, daß die Verformungen "klein" sind und die Querschnittsabmessungen klein gegenüber den Längenabmessungen sind, daß die Schubverformungen vernachlässigt werden dürfen und die Querschnitte bei der Verformung eben bleiben. Es wird mit punktförmig angreifenden Einzelkräften und punktförmigen starren Lagern gearbeitet, und es wird ideal-elastisches Materialverhalten angenommen (Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes). Man muß natürlich voraussetzen, daß die in die Rechnung einfließenden Werte (Belastungen, Abmessungen, Materialeigenschaften) korrekt sind. Meist sind auf diesem langen Weg wesentlich mehr Unsicherheiten in die Rechnung eingeflossen als selbst durch ein grobes Näherungsverfahren noch hinzukommen können. Der Ingenieur weiß das und betrachtet auch analytisch gewonnene Ergebnisse mit der gebührenden Skepsis (und darf darauf hoffen, daß alle Unwägbarkeiten durch den Sicherheitsbeiwert aufgefangen werden).

Das Problem, ein (auf welchem Wege auch immer gewonnenes) Ergebnis einer Berechnung zu verifizieren, ist schwierig und mit letzter Konsequenz wohl genauso unmöglich wie der Nachweis, daß ein Rechenprogramm korrekt arbeitet. Gerade den mit Computer-Programmen ermittelten Ergebnissen wird oft viel zu sehr vertraut, obwohl einige zusätzliche Fehlerquellen bei der Nutzung von Programmen hinzukommen:

- ◆ Computer-Programme können fehlerhaft sein (und sind es in der Regel auch). Da die groben Fehler im allgemeinen in der Testphase bemerkt werden, sind es gerade die speziellen Probleme, die bei einem auch über lange Zeit zuverlässig arbeitenden Programm plötzlich zu einem Fehler führen, der sich im "günstigen Fall" durch einen Programm-Absturz oder ein eindeutig unsinniges Ergebnis äußert, im wesentlich häufigeren ungünstigen Fall aber beim Benutzer keine Skepsis gegenüber dem ermittelten Ergebnis hervorruft.

Übrigens: Viele Anwender wären entsetzt, wenn sie wüßten, wieviele Fehler in ihren Programmen den Software-Herstellern selbst bekannt sind. Diese Fehler werden nicht beseitigt, weil natürlich jede Programm-Änderung (auch und gerade die Fehlerbeseitigung) Ursache für neue Fehler sein kann. Außerdem ist die Suche nach Fehlerursachen außerordentlich mühselig und könnte mit Erfolg meist nur von den Programm-Entwicklern erledigt werden, die beim Bekanntwerden eines Fehlers schon längst an einem anderen Projekt arbeiten.

- ◆ Man kann das falsche Programm einsetzen. Wer einen biegesteifen Rahmen mit einem Fachwerk-Programm berechnet (und wenn man Pech hat, stürzt das Programm nicht ab) und sich freut, daß keine Biegemomente (und damit auch nicht die gefährlichen Biegespannungen) hervorgerufen werden, darf das falsche Ergebnis natürlich nicht dem Programm anlasten.

- ◆ Man kann auch ein zum Problem passendes und richtig rechnendes Programm falsch bedienen, indem man ihm falsche Eingabedaten anbietet. Die hierbei wohl häufigsten Fehler bei Ingenieur-Problemen sind falsche Dimensionen für richtige Zahlenwerte. Viele Programme schreiben die Dimensionen der Eingabewerte fest vor oder gestatten dem Benutzer die Einstellung. Daran muß man sich dann natürlich konsequent halten. Häufiger ist der Fall, daß keine Vorschriften über die Dimensionen für die Eingabewerte getroffen werden, die berechneten Ergebnisse orientieren sich dann an den gewählten Dimensionen. In diesem Fall ist noch größere Konsequenz erforderlich: Wenn zum Beispiel m und kN für Abmessungen und Kräfte gewählt werden, dann muß der Elastizitätsmodul in der ungewöhnlichen Dimension kN/m^2 eingegeben werden, Biegemomente als Ergebnis würden man in diesem Fall in kNm erhalten (im allgemeinen ist man mit der Wahl " mm und N " gut beraten).

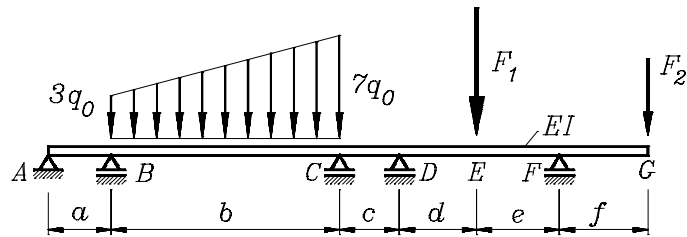
Das eingegebene Berechnungsmodell sollte in jedem Fall einer genauen Kontrolle unterworfen werden. Das mühsame Vergleichen vieler Zahlenwerte wird von guten Rechenprogrammen durch entsprechend aufbereitete Listen unterstützt, besonders effektiv sind Kontrollen mit graphischer Unterstützung (Vorsicht, die Graphik zeigt vieles, aber nicht alles: Fehler bei Abmessungen sieht man in graphischen Darstellungen im allgemeinen sofort, aber ein falscher Elastizitätsmodul ist meist auf diesem Wege nicht zu finden).

Numerisch berechnete Werte und die Ergebnisse, die mit Computer-Programmen ermittelt worden sind, sollten unbedingt einer sehr skeptischen Kontrolle unterzogen werden. Dazu kann man z. B.

- ◆ die zu erwartenden Ergebnisse vorher abschätzen und die errechneten Ergebnisse mit den Schätzungen vergleichen (für den unerfahrenen Anwender meist schwierig),
- ◆ die Einhaltung physikalischer Gesetzmäßigkeiten überprüfen (Biegemoment am Trägerrand gleich Null, wenn von außen kein Moment eingeleitet wird, Querkraftverlauf in unbelasteten Abschnitten konstant, Nullstellen der Querkraft, wenn Biegemoment einen Extremwert hat, Nullstab-Kriterien bei Fachwerken auswerten, berechnete Geschwindigkeiten sollten deutlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sein, Temperaturen nicht wesentlich unter -273°C liegen ...),
- ◆ Kontrollrechnungen mit vereinfachten (überprüfbaren) Berechnungsmodellen durchführen,
- ◆ eine Berechnung nach verschiedenen Verfahren (mit unterschiedlichen Rechenprogrammen) ausführen,
- ◆ untersuchen, ob nicht wenigstens Teilergebnisse mit erträglichem Aufwand nachgerechnet werden können.

An den nachfolgenden Aufgaben, die mit vorgegebenen Computer-Programmen zu lösen sind, sollen die genannten Kriterien für die Verifizierung der gewonnenen Ergebnisse erprobt werden.

Aufgabe 2.1: Für den skizzierten Träger berechne man die Durchbiegung, den Biegemomentenverlauf und den Querkraftverlauf nach unterschiedlichen Berechnungsverfahren (Finite-Elemente-Methode bzw. Differenzenverfahren) mit verschiedenen Computer-Programmen.

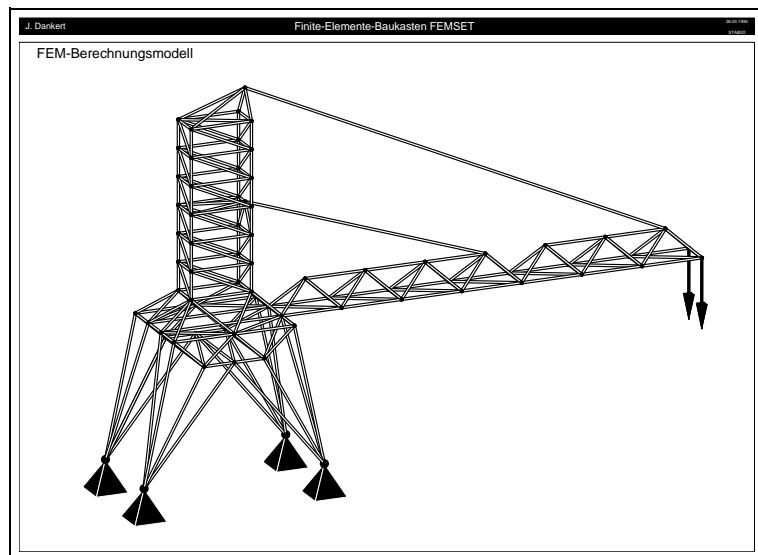


Geg.: $a = 220 \text{ mm}$; $b = 800 \text{ mm}$; $c = 210 \text{ mm}$;
 $d = 270 \text{ mm}$; $e = 290 \text{ mm}$; $f = 310 \text{ mm}$;
 $q_0 = 1 \text{ N/mm}$; $F_1 = 2 \text{ kN}$; $F_2 = 1 \text{ kN}$;
 $EI = 4,2 \cdot 10^9 \text{ Nmm}^2$.

- Das CAMMPUS-Programm **RAHMEN2D** muß für dieses Problem die (im Rahmen der klassischen Biegetheorie) exakten Ergebnisse liefern.
- Das von dem Studenten Peer-Olaf Siebers geschriebene Programm B-LINE berechnet die Biegelinie und die Schnittgrößenverläufe gerader Biegeträger mit dem Differenzenverfahren (verfügbar für PC und Sharp-Taschenrechner). Mit einer Einteilung des Trägers in 210 Abschnitte sind sehr gute Näherungswerte zu erwarten (im Novell-Netz des Rechenzentrums Berliner Tor kann das Programm mit **RUN B-LINE** gestartet werden).
- Man vergleiche die nach a) und b) ermittelten Ergebnisse. Welche der oben genannten Kriterien können außerdem zur Verifizierung der Ergebnisse herangezogen werden.

Aufgabe 2.2: Das Finite-Elemente-Berechnungsmodell für das nebenstehend skizzierte dreidimensionale Fachwerk (215 Stäbe) findet sich auf dem Novell-Server im File **KRAN3D.DAT**.

Man berechne die Knotenverschiebungen und die Stabkräfte mit dem CAMMPUS-Programm **FACH3D** und überprüfe die beiden Seilkräfte (in den Seilen, die den Ausleger tragen) durch eine Handrechnung (die in dem Berechnungsmodell gewählten Abmessungen und Belastungen können im Programm FACH3D aus den Tabellen entnommen werden). Wie aussagekräftig ist diese Überprüfung von zwei Einzelergebnissen hinsichtlich der Verifizierung der übrigen Ergebnisse?



Für alle Nullstäbe, die die FEM-Rechnung liefert, ist zu überprüfen, ob sie nach den Gleichgewichtskriterien der Statik voraussagbar gewesen wären.