3 Differenzenverfahren

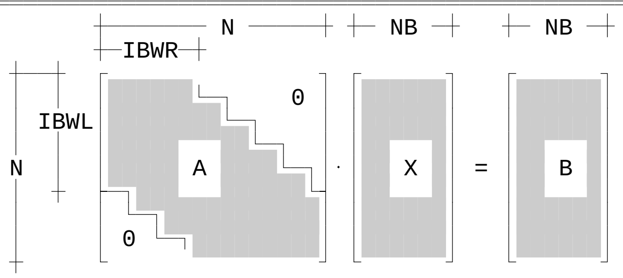
Eine besonders typische mathematische Modellierung einer physikalischen Gesetzmäßigkeit ist die Definition eines Rand- oder Anfangswertproblems: Die gesuchten Funktionen müssen eine Differentialgleichung (oder ein Differentialgleichungssystem) erfüllen, und an speziell vorgegebenen Punkten müssen sie (bzw. ihre Ableitungen) vorgeschriebene Werte annehmen (Rand- bzw. Anfangsbedingungen). Auch für relativ einfache Problemstellungen kann dies zu praktisch unüberwindlichen Schwierigkeiten führen, die Möglichkeit einer geschlossenen Lösung eines Rand- oder Anfangswertproblems ist in der technischen Praxis eher die Regel als die Ausnahme.

Für lineare Randwertprobleme (auch mit partiellen Differentialgleichungen) ist das **Differenzenverfahren** ein beinahe universell anwendbares Verfahren. Es basiert auf der Idee, die Differentialquotienten in den Differentialgleichungen und den Randbedingungen durch Differenzenquotienten zu ersetzen. Die Differenzenquotienten werden nur für ausgewählte Punkte (**Stützstellen**) aufgeschrieben, so daß schließlich die Differentialgleichungen und die Randbedingungen durch ein Gleichungssystem ersetzt werden, dessen Lösung die gesuchten Funktionswerte (natürlich nur an den Stützstellen) liefert.

Um den mit diesem Vorgehen unvermeidlich verbundenen Fehler in Grenzen zu halten, müssen die Stützstellen möglichst nah beieinander liegen, was zwangsläufig auf ein entsprechend großes Gleichungssystem führt.

> Das Differenzenverfahren ist prinzipiell auf jedes Randwertproblem anwendbar. **Praktikabel** ist es **nur für lineare Randwertprobleme**, weil sonst die Lösung des (nichtlinearen) Gleichungssystems zu unüberwindlichen Schwierigkeiten führt.

Bei geschickter Wahl der Reihenfolge für die Gleichungen kann die Koeffizientenmatrix eine ausgeprägte Bandstruktur aufweisen (nur in einem schmalen Band rechts und links von der Hauptdiagonalen befinden sich von Null verschiedene Elemente). Dies kann bei der Lösung mit Vorteil für Speicherbedarf und erforderliche Rechenzeit genutzt werden. Das CAMMPUS-Programm **MLINEQ** ist gerade auch auf solche Spezialfälle zugeschnitten. Es müssen nur die wesentlichen Matrixelemente (innerhalb des Bandes) eingegeben werden, und die Eingabe wird außerdem durch die Möglichkeit der Definition von Makros unter-




```
Anzahl der Gleichungen:                N =   225
Linke  Bandweite:                   IBWL =     4
Rechte Bandweite:                   IBWR =     4
Anzahl der "rechten Seiten":          NB =     1
Automatische Zeilennormierung:                JA
```

Programm MLINEQ: Typische "Abmessungen" für ein "Differenzenverfahren-Gleichungssystem"

stützt, so daß auch die Eingabe eines Systems mit mehreren hundert Gleichungen mit recht geringem Aufwand erledigt werden kann.

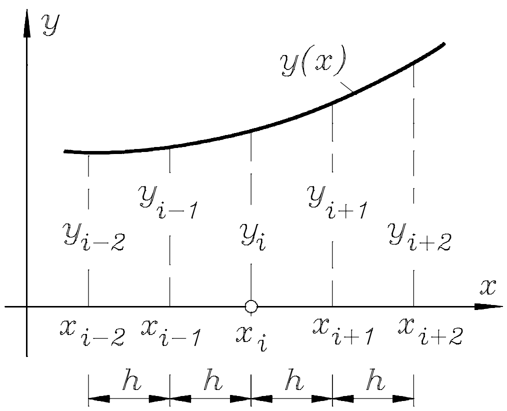
Im Rahmen dieser Vorlesung wird das Differenzenverfahren nur am Beispiel der Ermittlung von Biegelinien für gerade Träger behandelt. Das Vorgehen ist exemplarisch für beliebige andere lineare Randwertprobleme. Das Verfahren ist für das genannte Problem im Abschnitt 18.1 in "Dankert/Dankert: Technische Mechanik, computerunterstützt" ausführlich beschrieben (in den Abschnitten 19.2 und 19.3 wird auch die Anwendung auf andere lineare Randwertprobleme demonstriert). Deshalb werden nachfolgend nur die wichtigsten Formeln zusammengestellt.

3.1 Zentrale Differenzenformeln

Die Abszisse $\boldsymbol{x}$ wird äquidistant (Abstand $\boldsymbol{h}$) unterteilt (nebenstehende Skizze). Dann kann der Differentialquotient als Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

an der beliebigen Stützstelle $\boldsymbol{i}$ (bei $\boldsymbol{x_i}$) angenähert werden. Für die ersten vier Ableitungen der Funktion $\boldsymbol{y(x)}$ erhält man die folgenden (wegen ihrer Symmetrie zur Stützstelle $\boldsymbol{i}$ als "zentral" bezeichneten) Näherungsformeln.



Zentrale Differenzenformeln:

$$y_i' \approx \frac{1}{2h}\left(-y_{i-1} + y_{i+1}\right) \quad ,$$

$$y_i'' \approx \frac{1}{h^2}\left(y_{i-1} - 2\,y_i + y_{i+1}\right) \quad ,$$

$$y_i''' \approx \frac{1}{2h^3}\left(-y_{i-2} + 2\,y_{i-1} - 2\,y_{i+1} + y_{i+2}\right) \quad ,$$

$$y_i'''' \approx \frac{1}{h^4}\left(y_{i-2} - 4\,y_{i-1} + 6\,y_i - 4\,y_{i+1} + y_{i+2}\right) \quad .$$

Die Differenzenformeln stellen in dieser Form eine recht einfache Näherung für die Differentialquotienten dar. Sogenannte "höhere Differenzenformeln", die durch das Einbeziehen weiterer Nachbarpunkte eine bessere Näherung ergeben würden (es werden mehr Glieder der Taylorreihen-Entwicklung der Funktion berücksichtigt), sind für die praktische Anwendung jedoch weniger geeignet, weil an den Rändern mehr "Außenpunkte" in die Rechnung hineinkommen, für die dann keine zusätzlichen Gleichungen aus den Randbedingungen mehr verfügbar sind.

3.2 Biegelinie des geraden Trägers

Die Differentialgleichung der Biegelinie eines geraden Trägers mit veränderlichem Querschnitt wird mit Hilfe der zentralen Differenzenformeln durch folgende Differenzengleichung angenähert.

Differenzenschema für die Differentialgleichung $[EI\, v''(z)]'' = q(z)$:

$$I_{i-1}\, v_{i-2} - 2\left(I_{i-1} + I_i\right) v_{i-1} + \left(I_{i-1} + 4\, I_i + I_{i+1}\right) v_i$$
$$- 2\left(I_i + I_{i+1}\right) v_{i+1} + I_{i+1}\, v_{i+2} = \frac{q_i\, h^4}{E} \; .$$

In die Randbedingungen dieser Differentialgleichung vierter Ordnung können Aussagen über das Biegemoment und die Querkraft eingehen. Die für diese beiden Größen geltenden Differentialbeziehungen

$$M_b = -\,EI\, v'' \qquad und \qquad F_Q = -\,(EI\, v'')'$$

werden ebenfalls durch Differenzenformeln genähert:

Schnittgrößen in Differenzenschreibweise bei veränderlicher Biegesteifigkeit

$$M_{bi} = -\frac{EI_i}{h^2}\left(v_{i-1} - 2\, v_i + v_{i+1}\right) \quad ,$$

$$F_{Qi} = \frac{E}{2h^3}\left[I_{i-1}\, v_{i-2} - 2\, I_{i-1}\, v_{i-1} + \left(I_{i-1} - I_{i+1}\right) v_i + 2\, I_{i+1}\, v_{i+1} - I_{i+1}\, v_{i+2}\right]$$

Für konstantes ***EI*** vereinfachen sich die Formeln zu den

Differenzenformeln bei konstanter Biegesteifigkeit:

$$v_{i-2} - 4\, v_{i-1} + 6\, v_i - 4\, v_{i+1} + v_{i+2} = \frac{q_i\, h^4}{EI} \quad ,$$

$$M_{bi} = -\frac{EI}{h^2}\left(v_{i-1} - 2\, v_i + v_{i+1}\right) \quad ,$$

$$F_{Qi} = -\frac{EI}{2h^3}\left[-v_{i-2} + 2\, v_{i-1} - 2\, v_{i+1} + v_{i+2}\right] \quad .$$

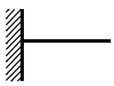
Für konstante Biegesteifigkeit kann das Gleichungssystem (vgl. "Dankert/Dankert: Technische Mechanik, computerunterstützt", Seite 263) stets in folgender Form aufgeschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x & & & & & & \\ x & x & x & x & x & & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & & & \\ & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & y & y & y & y & y \\ & & & & & & y & y & y & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n_A+5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ \kappa_3 / n_A^4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \kappa_{n_A+3} / n_A^4 \\ y \\ y \end{bmatrix} \frac{q_0 l^4}{EI}$$

Darin ist n_A die Anzahl der Abschnitte, in die die Trägerlänge unterteilt wird (es ergeben sich $n = n_A + 5$ Gleichungen), q_0 ist eine beliebige "Bezugs-Linienlast", mit der die Linienlast-Intensität eines beliebigen Punktes i als $q_i = \kappa_i \, q_0$ aufgeschrieben wird.

Die wichtigsten Randbedingungen für konstantes EI lauten in Differenzenschreibweise:

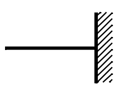
Freier Rand: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

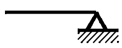
 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Randbedingungen am linken Trägerrand (Gleichungen **1** und **2**)

Freier Rand: $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n_A+4} \\ v_{n_A+5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

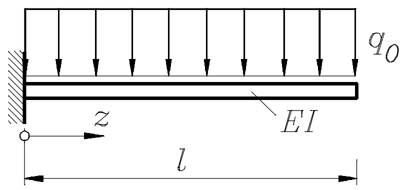
 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n_A+4} \\ v_{n_A+5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n_A+4} \\ v_{n_A+5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Randbedingungen für den rechten Trägerrand (Gleichungen $n - 1$ und n)

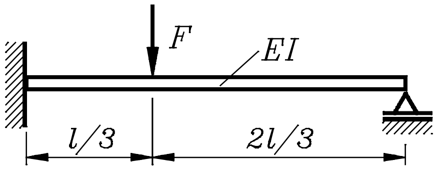
"Tricks", wie Einzellasten, Zwischenstützen, Federn, Gelenke und weitere spezielle Randbedingungen realisiert werden können, finden sich in "Dankert/Dankert: Technische Mechanik, computerunterstützt"auf den Seiten 263 bis 265, 268 und 301 bis 302.

Aufgabe 3.1: Für den skizzierten Träger mit konstanter Biegesteifigkeit EI sind die Durchbiegung und die Schnittgrößen näherungsweise mit dem Differenzenverfahren zu bestimmen und mit den Werten der exakten Lösung zu vergleichen.



Gegeben: l , q_0 , $EI = konstant$.

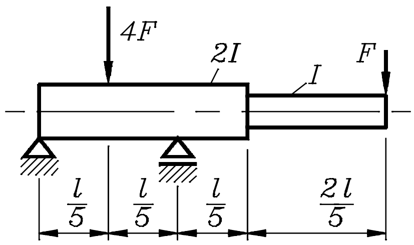
Aufgabe 3.2: Für den skizzierten Biegeträger sind mit Hilfe des Differenzenverfahrens Durchbiegung, Biegemoment- und Querkraftverläufe zu berechnen.



Gegeben: F ; I ; l ; $E = konst.$

Gesucht: v_i, M_{bi}, F_{Qi} bei einer Einteilung des Trägers in 180 Abschnitte.

Aufgabe 3.3: Für den skizzierten Biegeträger sind mit Hilfe des Differenzenverfahrens Durchbiegung, Biegemoment- und Querkraftverläufe zu berechnen.

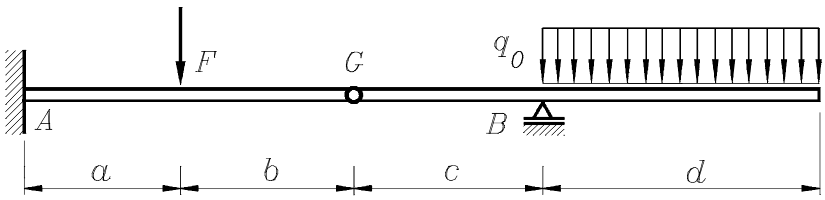


Gegeben: F ; I ; l ; $E = konst.$

Gesucht: v_i, M_{bi}, F_{Qi} bei einer Einteilung des Trägers in 100 Abschnitte.

Aufgabe 3.4:

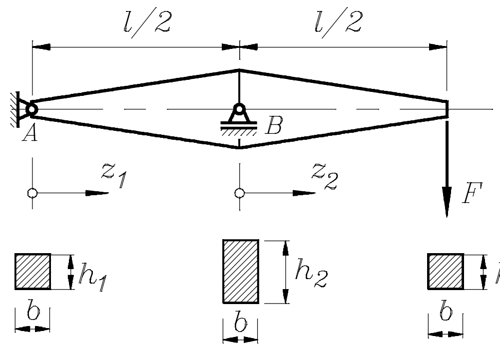
Geg.: $a = 44\ cm$;
$b = 50\ cm$;
$c = 58\ cm$;
$d = 80\ cm$;
$F = 3{,}48\ q_0 d$.



Man ermittle für den skizzierten Gerberträger mit dem Differenzenverfahren die dimensionslosen Durchbiegungen $EI\,v/(q_0 l^4)$.

Hinweis: Bei einer Einteilung der Gesamtlänge $l = a + b + c + d$ in **116** (oder **232**) Abschnitte werden alle markanten Punkte des Trägers von Stützstellen "getroffen".

Aufgabe 3.5: Der skizzierte Kranausleger hat einen Rechteckquerschnitt mit linear veränderlicher Höhe und konstanter Breite.



Gegeben: $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{h_1}$, $\boldsymbol{h_2} = \lambda \boldsymbol{h_1}$.

a) Man stelle das Flächenträgheitsmoment des Auslegers als Funktionen der skizzierten Koordinaten dar und gewinne daraus das Verhältnis $\mu_i = I_i / I_0$ des Flächenträgheitsmomentes am Punkt $\boldsymbol{i}$ bezogen auf das Flächenträgheitsmoment am Auslegerende $I_0 = (b\, h_1^3)/12$, wenn der gesamte Träger für eine Berechnung mit dem Differenzenverfahren in n_A Abschnitte unterteilt wird.

b) Für den Angriffspunkt der Kraft $\boldsymbol{F}$ ist die Querkraft-Randbedingung in Differenzenschreibweise zu formulieren.

c) Mit Hilfe des Differenzenverfahrens ist die Durchbiegung des Trägers bei einer Einteilung in insgesamt $n_A = 100$ Abschnitte für $\lambda = 1; 2; 3$ zu berechnen (Empfehlung: Man nutze zur Aufstellung des Gleichungssystems die Makrotechnik des Programms MLINEQ und speichere jeweils das gesamte Berechnungsmodell für die Berechnungen der Fragestellung g).

d) Aus den unter c) ermittelten Verschiebungen bestimme man mit der Differenzenformel das Biegemoment am Lager $\boldsymbol{B}$ und vergleiche mit dem exakten Wert.

e) Für $\lambda = 1$ kontrolliere man das Ergebnis für die Durchbiegung am Angriffspunkt der Kraft $\boldsymbol{F}$ durch Superposition bekannter Lastfälle.

f) Für $\lambda = 2$ sind die Biegelinie und der Momentenverlauf graphisch darzustellen. Man diskutiere das Ergebnis (insbesondere für das Biegemoment).

g) Für den bei $\boldsymbol{A}$ starr eingespannten (und damit statisch unbestimmt gelagerten) Träger (nebenstehende Skizze) sind die Teilaufgaben a) bis f) zu lösen (Hinweis: In den Gleichungssystemen für das Differenzenverfahren ändert sich jeweils nur eine Matrixzeile). Zusätzlich berechne man das Einspannmoment am Lager $\boldsymbol{A}$ mit den Differenzenformeln.