4 Die Methode der finiten Elemente

Die **Methode der finiten Elemente** (häufig gebrauchte Abkürzung: **FEM** für "Finite-Elemente-Methode") basiert auf der Idee, das zu berechnende Gebilde in eine (große) Anzahl einfacher (und damit der Berechnung zugänglicher) Elemente zu zerlegen und aus den Elementlösungen die Lösung für das Gesamtsystem zu konstruieren. Das Wort "finit" steht dabei für die "endlichen" Abmessungen der Elemente (im Gegensatz zu den "unendlich kleinen" Elementen, mit denen die Differentialbeziehungen hergeleitet werden).

Heute ist die Methode der finiten Elemente sicher das am meisten benutzte Verfahren, um naturwissenschaftliche und technische Probleme mit Hilfe des Computers zu lösen. Es gibt eigentlich kaum ein Problem aus Festigkeitslehre und Dynamik, Strömungsmechanik, aber auch Thermodynamik, Magnetfeld- und Gezeitentheorie, Wettervorhersage und vielen anderen Gebieten, das nicht mit diesem Verfahren gelöst werden kann. Der Aufwand kann allerdings (abhängig vom Problem) enorm sein, aber ein Formalisierungsgrad wie bei kaum einem anderen Verfahren gestattet es, den Aufwand weitgehend dem Computer zu übertragen.

Die Finite-Elemente-Methode findet ihre Begründung entweder auf rein mathematischem Wege, indem die (als Differentialgleichungen oder Variationsprobleme formulierten) mathematischen Modelle genähert werden (dabei zeigt sich eine gewisse Ähnlichkeit der FEM mit dem Differenzenverfahren, es entsteht auch ein im allgemeinen sehr großes lineares Gleichungssystem), man kann jedoch bereits das physikalische Modell durch ein "Finite-Elemente-Modell" ersetzen, das dann schließlich auf das gleiche lineare Gleichungssystem führt. Der letztgenannte Weg hat für den Ingenieur den Vorteil, daß die getroffenen Näherungsannahmen durchschaubarer sind, was eine Bewertung des Ergebnisses erleichtert.

Der Weg, den typischen Finite-Elemente-Algorithmus am physikalischen Modell herzuleiten, wird in "Dankert/Dankert: Technische Mechanik, computerunterstützt" im Kapitel 15 am einfachsten Modell der Festigkeitslehre, dem Stab, in allen Einzelheiten beschrieben. Zum Verständnis müssen nur die Gleichgewichtsbedingungen der Statik und das Hookesche Gesetz vorausgesetzt werden. Es wird dringend empfohlen, die dort auf den Seiten 180 bis 185 detailliert beschriebene Vorgehensweise nachzuempfinden.

Die Methode der finiten Elemente ist ein Näherungsverfahren.

Die zahlreichen verfügbaren leistungsstarken und benutzerfreundlichen Computer-Programme verleiten dazu, das Verständnis für die durchzuführende Berechnung durch das Erlernen der Bedienung einer Benutzeroberfläche eines Programms zu ersetzen. Das ist außerordentlich gefährlich. Es ist möglich, mit korrekt arbeitenden Finite-Elemente-Programmen beliebigen Unsinn auszurechnen.

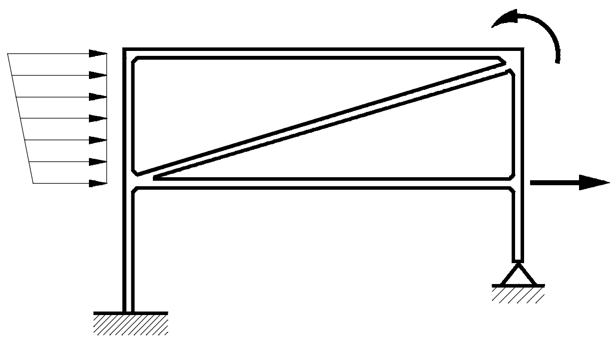
Die Gefahr des blinden Programm-Vertrauens wird noch dadurch vergrößert, daß es Problemklassen gibt, bei denen die Finite-Elemente-Methode die gleichen "exakten" Ergebnisse wie die üblicherweise verwendete Theorie liefert. Die nachfolgenden Erläuterungen sollen deshalb auch ein Gefühl dafür vermitteln, wann man den Ergebnissen vertrauen kann und wann Skepsis geboten ist.

4.1 Diskretisierung, Elemente und Knoten

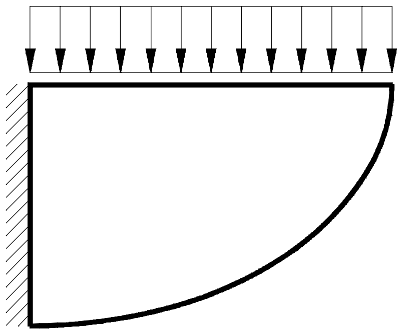
Ein **FEM-Berechnungsmodell** besteht aus finiten **Elementen**, die untereinander nur an bestimmten Punkten, den **Knoten**, verbunden sind.

Äußere Belastungen (dazu gehören auch die Lagerreaktionen) werden **nur an den Knoten** eingeleitet, Elementlasten (Linienlasten, Flächen- und Volumenlasten, Temperaturbelastung, ...) müssen auf äquivalente Knotenlasten reduziert werden.

An den beiden nachfolgend skizzierten einfachen Beispielen soll das typische Vorgehen beim Erzeugen eines Finite-Elemente-Berechnungsmodells demonstriert werden.



Ebenes biege- und dehnsteifes Rahmentragwerk



Konsole (ebene Scheibe)

Eine Analyse aus der Sicht des Berechnungs-Ingenieurs, der mit "klassischen Berechnungsverfahren" arbeitet, liefert folgendes Ergebnis:

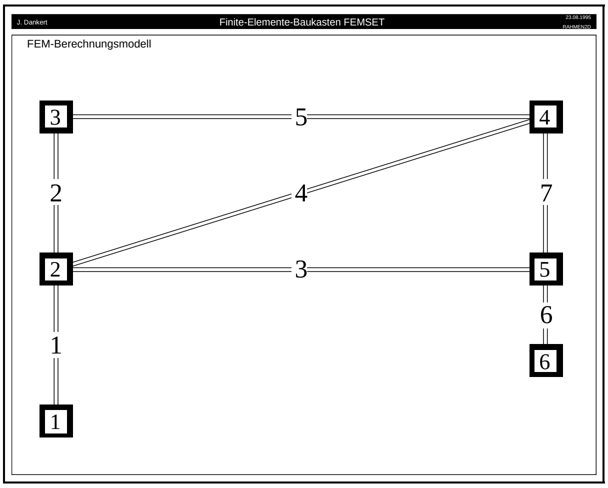
- Das skizzierte Rahmentragwerk kann nach der klassischen Biegetheorie berechnet werden (Verformungen, Schnittgrößen, Spannungen), "im Prinzip". Der Einfluß der Dehnung infolge der Normalkräfte kann sicher mit gutem Gewissen vernachlässigt werden. Aber: Kein mit normaler Vernunft ausgestatteter Ingenieur würde sich die Mühsal der "Handrechnung" heute noch antun (das Tragwerk ist immerhin achtfach statisch unbestimmt).
- Die Konsole kann nach der Theorie der ebenen Scheiben behandelt werden (flächenhafte dünnwandige Gebilde, die nur in ihrer Ebene belastet sind). Eine analytische Lösung des Problems der einseitig eingespannten und krummlinig berandeten Scheibe ist jedoch unmöglich.

Bei Anwendung der Finite-Elemente-Methode auf die beiden Probleme gibt es (neben vielen Gemeinsamkeiten) ähnliche Unterschiede in der Beurteilung der zu erwartenden Ergebnisse:

- FEM-Programme können die Theorie der biege- und dehnsteifen Träger exakt erfassen. Bei Benutzung eines geeigneten Programms (z. B. des zu CAMMPUS gehörenden Programms RAHMEN2D) erhält man die Ergebnisse, die sich nach der Handrechnung ergeben würden, wenn die Handrechnung für das Problem fehlerfrei gelänge, was allerdings eher unwahrscheinlich ist.

- Die Scheiben-Theorie kann auch von der Finite-Elemente-Methode nur approximiert werden. Man kann dem Ergebnis der Scheiben-Theorie möglicherweise sehr nahe kommen (man weiß allerdings nie genau, wie nahe, denn eine analytische Lösung ist mit Ausnahme sehr weniger "akademischer" Probleme unmöglich), schließlich entscheidet der betriebene Aufwand weitgehend darüber, wie gut das Ergebnis ist. Aufwand und Qualität des Ergebnisses sind eng verknüpft mit dem Problem, das zu berechnende System in finite Elemente zu unterteilen.

Mit der Art der Einteilung des zu berechnenden Systems in finite Elemente wird schon weitgehend die Entscheidung über die Qualität der Ergebnisse getroffen. Die beiden betrachteten Beispiele unterscheiden sich gerade in dieser Hinsicht ganz erheblich voneinander.

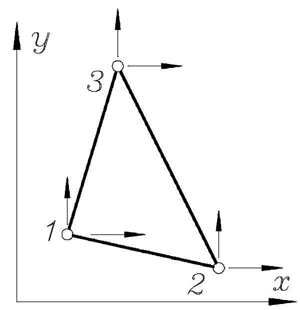


Für das biege- und dehnsteife Rahmentragwerk bietet sich eine "natürliche" Einteilung geradezu an, die (wie nebenstehend skizziert) auf ein System mit 7 Elementen führt, die an 6 Knoten miteinander verbunden sind. Die Elemente sind jeweils **biege- und dehnsteife gerade Träger**.

Da die "klassische Theorie" von der Finite-Elemente-Methode für diesen Elementtyp exakt erfaßt wird, gibt es keinen Grund, eine andere Elementeinteilung zu wählen, denn die "Elementlösungen", die für jedes finite Element erzeugt und zur Lösung für das Gesamtsystem zusammengefügt werden, basieren auf den Annahmen der klassischen Theorie. Die komplette Herleitung aller Beziehungen für diesen Elementtyp findet sich in "Dankert/Dankert: Technische Mechanik, computerunterstützt" im Abschnitt 18.2.

Ganz anders muß für das Scheibenproblem überlegt werden: Da in jedem Fall auch die Elementlösungen zwangsläufig Näherungen sind, trifft man schon mit der Auswahl geeigneter Elemente eine wichtige Vorentscheidung für die Qualität der Ergebnisse.

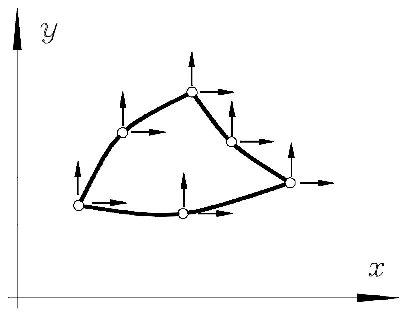
Das einfachste Scheibenelement ist ein Dreieck mit drei Knoten, das nur an diesen drei Punkten mit den Nachbarelementen Kontakt hat (und wie skizziert zwei Kraftkomponenten an den Knoten übertragen kann). Aus didaktischen Gründen wird dieses besonders einfache Element in vielen Lehrbüchern behandelt, es ist auch in fast allen FEM-Programmsystemen verfügbar, seine Verwendung ist jedoch kaum empfehlenswert, weil eine nur sehr grobe Näherung der Scheibentheorie erreicht wird.



Scheiben-Dreiecks-Element SD6 (6 Freiheitsgrade)

Zu den 6 Knotenkräften gehören 6 Knotenverschiebungen, die für die Approximation des Verschiebungszustandes **6 Freiheitsgrade** bieten. Damit ist nur ein linear veränderlicher Verschiebungszustand im Element realisierbar, die Verzerrungen (Dehnungen und Gleitungen) als erste Ableitungen der Verschiebungen und damit die zu den Verzerrungen proportionalen Spannungen sind also im Element konstant. Nur bei einer sehr feinen Einteilung des zu berechnenden Systems mit sehr vielen Elementen ist eine brauchbare Näherung zu erwarten.

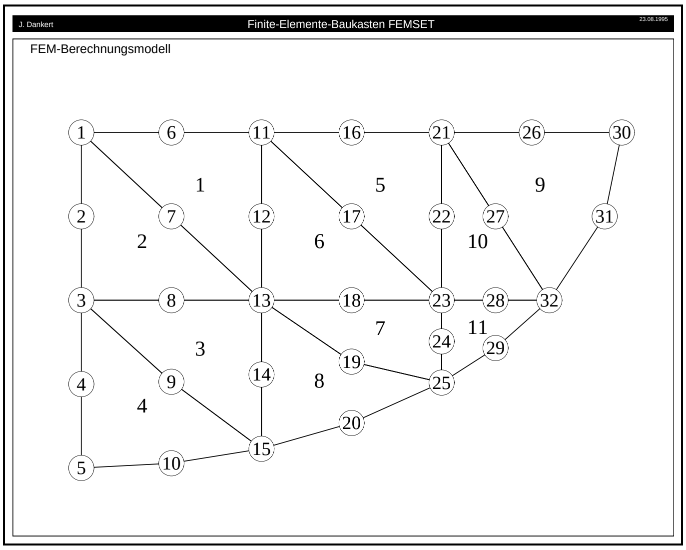
Eine wesentliche bessere Näherung wird mit einem Dreiecks-Element mit 6 Knoten erzeugt (jeweils zusätzliche Knoten in den Seitenmitten). Die ohnehin schon sehr gute Anpassungsmöglichkeit von Dreiecks-Elementen auch an kompliziertere Konturen kann noch dadurch erhöht werden, daß (wie skizziert) ein Element mit gekrümmten Kanten verwendet wird. Mit 12 Freiheitsgraden kann der Verschiebungszustand wesentlich besser erfaßt werden.



Scheiben-Dreiecks-Element SD12
(6 Knoten, 12 Freiheitsgrade)

Es sind natürlich auch Elemente mit noch größerer Knotenanzahl denkbar, neben den Dreiecks-Elementen werden in den meisten Programmsystemen noch Vierecks-Elemente angeboten. Das skizzierte Element SD12 hat sich (wie das mit ihm verwandte Vierecks-Element mit 8 Knoten und 16 Freiheitsgraden) allerdings in der Praxis als besonders günstiger Kompromiß zwischen gewünschter Genauigkeit und erforderlichem Aufwand erwiesen. Die Algorithmen zur Herleitung der Elementsteifigkeitsbeziehungen für die Elemente SD6 und SD12 findet man z. B. in "Dankert: Numerische Methoden der Mechanik".

Die nebenstehende Skizze zeigt eine Einteilung der Konsole in 11 Elemente vom Typ SD12, wobei sich 32 Knoten ergeben (bei 2 Freiheitsgraden pro Knoten entsteht ein Gleichungssystem mit 64 Gleichungen).



Die Frage, ob eine solche Einteilung ausreichend fein ist, kann allgemein nicht beantwortet werden. Der Praktiker, der nicht bereits durch zahlreiche Finite-Elemente-Berechnungen ausreichende Erfahrungen gesammelt hat, kommt nicht umhin, gegebenenfalls mehrere Rechnungen mit unterschiedlich feiner Elementeinteilung durchzuführen. Allgemein gilt: In Bereichen mit starker Änderung der Spannungen (speziell z. B. in der Nähe von Kerben, wo Spannungsspitzen zu erwarten sind) muß eine besonders feine Einteilung gewählt werden. Speziell für das betrachtete Problem gilt: Auch bei sehr bescheidenen Anforderungen an die Genauigkeit der Ergebnisse ist die skizziert Elementeinteilung wesentlich zu grob.

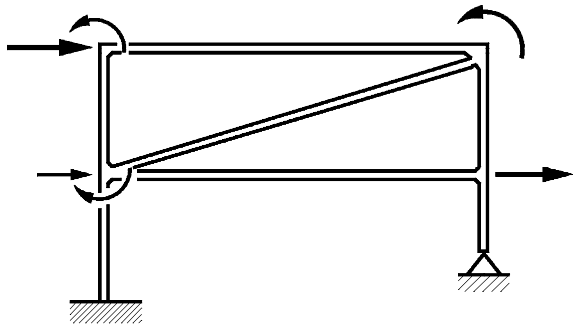
Die sinnvolle Einteilung eines Systems in finite Elemente ist außerordentlich schwierig und verlangt Erfahrung. Man lasse sich nicht täuschen von Aussagen über "Datengenerator-Programme", die das angeblich automatisch und sinnvoll erledigen.

Im Gegensatz dazu kann man bei der Elementeinteilung für Probleme, deren "klassische Theorie" von der Finite-Elemente-Methode exakt erfaßt wird (z. B.: Fachwerke und biege-, dehn- und torsionssteife Rahmen) praktisch nichts falsch machen.

4.2 Reduktion der Elementlasten

Belastungen dürfen am Finite-Elemente-Modell nur an den Knoten angreifen. Auch bei der Reduktion der an den Elementen angreifenden Lasten auf statisch äquivalente Knotenlasten verhalten sich die Elementtypen unterschiedlich:

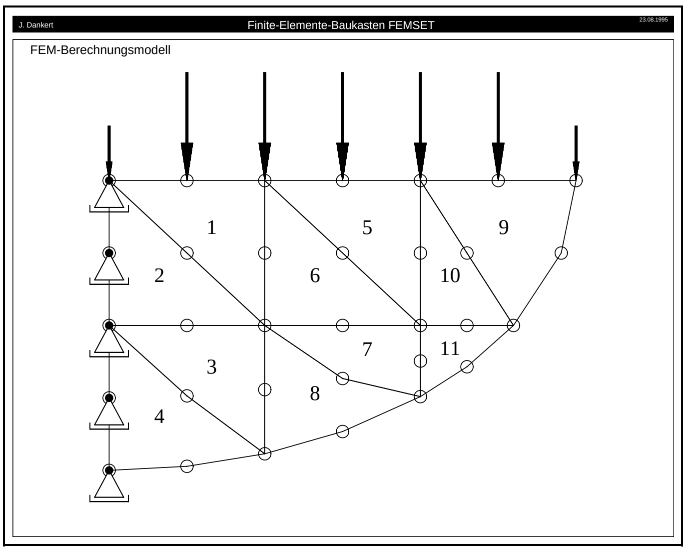
- In "Dankert/Dankert: Technische Mechanik, computerunterstützt", Seite 276 wird gezeigt, daß es für biegesteife gerade Träger möglich ist, Linienlasten so durch statisch äquivalente Knotenlasten (Kräfte und Momente) zu ersetzten, daß sich für alle Knoten des Systems der unverfälschte Verformungszustand ergibt. Für die Elemente, für die eine solche Reduktion von Elementlasten vorgenommen wurde, können im Inneren des Elements der Verformungszustand und die Schnittgrößen so "repariert" werden, daß sich alle Werte exakt ergeben.

  Die nebenstehende Skizze zeigt das im vorigen Abschnitt bereits betrachtete System nach der Ersetzung der am Element 2 angreifenden Linienlast durch äquivalente Knotenlasten. Der Benutzer des CAMMPUS-Programms RAHMEN2D bemerkt davon allerdings nichts, denn er kann die Linienlasten direkt eingeben, Reduktion und "Rückrechnung mit den erforderlichen Reparaturen" werden vom Programm erledigt.

  Die Tatsache, daß auch Lager nur an den Knoten zugelassen sind, hat für den biegesteifen Rahmen keine Konsequenzen: Wo ein Lager ist, wird ein Knoten plaziert.

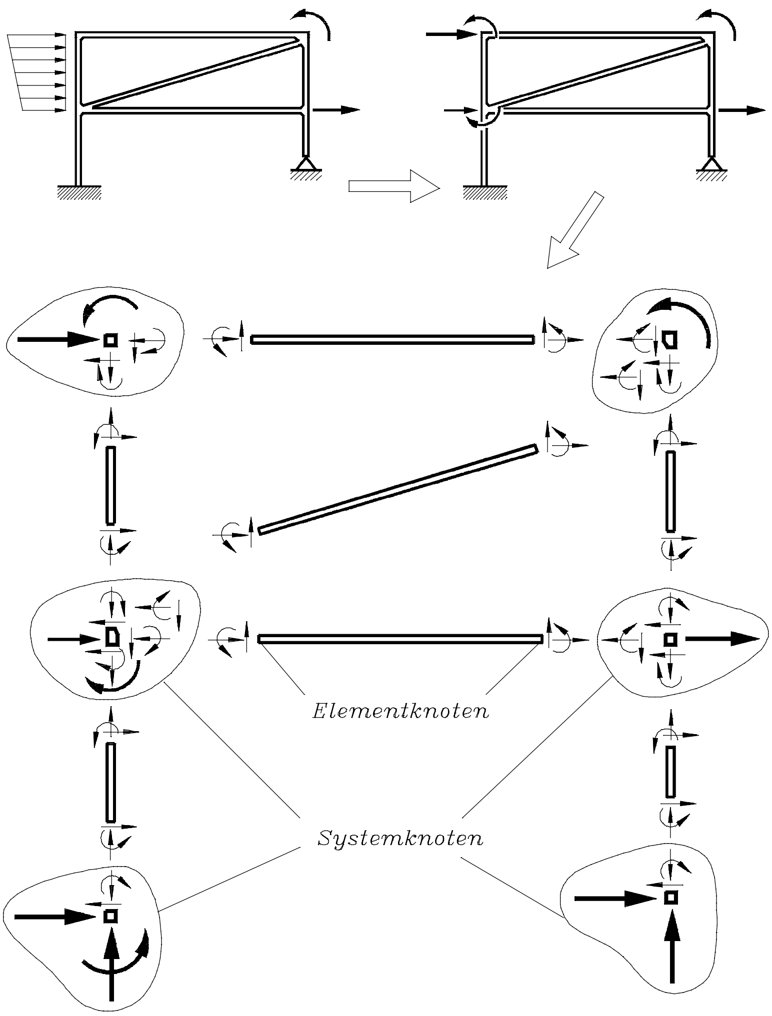
- Das Ersetzen der auf die Scheibenelemente wirkenden Lasten (im Beispiel des vorigen Abschnitts: Linienlasten) durch Knotenlasten ist mit einem Fehler in der gleichen Größenordnung behaftet, wie er durch die Approximation des Verschiebungsfeldes im Elementinneren entsteht. Praktisch sind die Auswirkungen meist unbedeutend, außerdem überblickt der Anwender, ob z. B. (wie nebenstehend skizziert) beim Ersetzen einer Linienlast durch Einzellasten das Modell überhaupt nennenswert verfälscht wird.

  Auch die tatsächliche Lagerung der Scheibe kann natürlich nur approximiert werden. Die Skizze zeigt, wie der eingespannte Rand durch Festlager für alle auf dem Rand liegenden Knoten angenähert werden muß.

4.3 Trennung der inneren Kraftgrößen von der äußeren Belastung

Nachdem die äußere Belastung (auch die unbekannten Lagerreaktionen gehören dazu) auf die Knoten reduziert wurde, wird ein "Rundumschnitt" um jeden Knoten gelegt. So werden die **Systemknoten**, auf die die äußere Belastung wirkt, von den **Elementknoten** getrennt (Knoten haben im Gegensatz zu den Elementen keine Abmessungen).



Belastungen an den Systemknoten und den Elementknoten

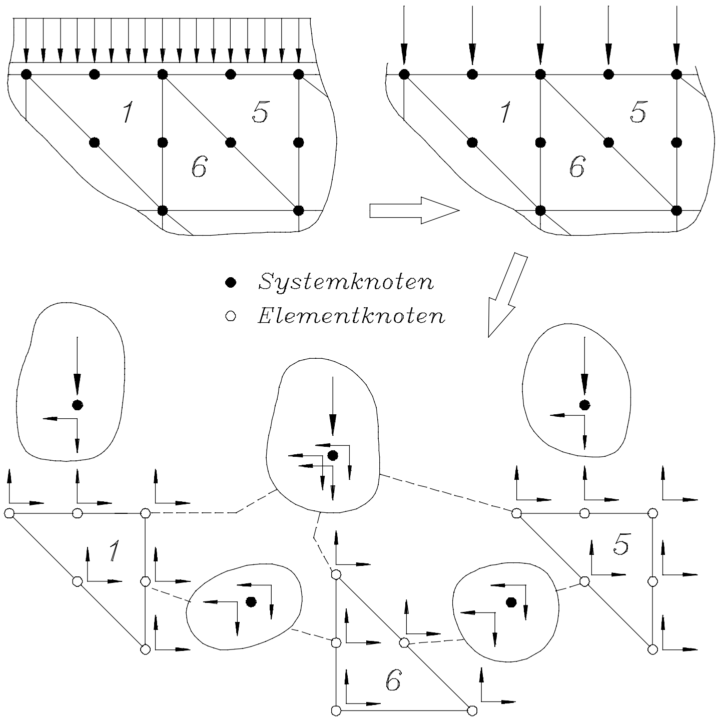
Natürlich müssen nach dem Schnittprinzip der Mechanik an beiden Schnittufern die Schnittgrößen angetragen werden (beim biege- und dehnsteifen Träger sind es wie skizziert zwei Kraftkomponenten und ein Moment), "gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet", wie es das Schnittprinzip vorschreibt.

Von zwei in der Technischen Mechanik üblichen Konventionen wird abgewichen (natürlich ohne irgendeine Verletzung der mechanischen Gesetzmäßigkeiten). Beide betreffen das **Antragen der Schnittreaktionen an den Elementknoten:**

- Die Kraftkomponenten werden konsequent an allen Elementknoten aller Elemente in der gleichen Richtung (z. B. horizontal und vertikal, zu definieren als **globale Koordinatenrichtungen**) angetragen (im Gegensatz zu den Richtungen von "Normalkraft" und "Querkraft", die üblicherweise senkrecht bzw. parallel zur Schnittfläche angetragen werden).
- Der positive Richtungssinn der Kraftkomponenten und der positive Drehsinn für die Momente wird an allen Elementknoten gleich definiert (zwangsläufige Folge für ein Element mit nur zwei Knoten ist, daß die Kraftkomponenten an den beiden Knoten gleiche Größe, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben).

Nach dem Schnittprinzip werden damit auch der positive Richtungssinn der Kraftkomponenten und der positive Drehsinn der Momente an allen Systemknoten gleich, allerdings gerade entgegengesetzt zu den Elementknoten. Dies betrifft natürlich nur die (inneren) Schnittkräfte, die äußere Belastung behält ihre Originalrichtung bei.

Diese Vereinbarungen tragen wesentlich zum hohen Formalisierungsgrad des Finite-Elemente-Algorithmus bei. Sie sind eindeutig und nicht schwierig, wohl aber etwas gewöhnungsbedürftig, deshalb sollen sie auch noch einmal am Beispiel der Scheibenelemente demonstriert werden. Die nebenstehende Skizze zeigt einen Ausschnitt aus dem schon im vorigen Abschnitt behandelten Beispiel. Die Elementlasten wurden auf die Knoten reduziert, anschließend werden die Elemente mit den Elementknoten und die Systemknoten voneinander getrennt.



Belastungen an den Systemknoten und den Elementknoten

Auch hier verbleiben die äußeren Lasten auf den Systemknoten. Die durch das Freischneiden der Systemknoten sichtbaren inneren Kräfte (für diesen Elementtyp sind es zwei Kraftkomponenten pro Knoten) werden als **Elementknotenkräfte** bezeichnet und müssen paarweise (mit entgegengesetztem Richtungssinn) am Elementknoten und am Systemknoten angetragen werden. In der Skizze sind nur für die 5 Systemknoten der jeweils volle Satz der Kräfte angetragen, für die in dem Ausschnitt sämtliche angrenzenden Elemente zu sehen sind.

Ein elastostatisches Problem muß Gleichgewicht und Kompatibilität (Verschiebungsverträglichkeit) garantieren:

Gleichgewicht wird an den Systemknoten hergestellt: An jedem Systemknoten werden alle sinnvollen Gleichgewichtsbedingungen formuliert, in die die dort angreifenden äußeren Lasten und die Elementknotenkräfte (innere Kräfte) eingehen.

Kompatibilität wird hergestellt, indem die Verformungen der Elemente infolge der Elementknotenkräfte berechnet werden und **Gleichheit der Verformungen an den Knoten** für alle dort angrenzenden Elemente gefordert wird.

- ♦ Die Kompatibilitätsforderung offenbart einen weiteren Unterschied der beiden betrachteten Elementtypen: Während ein biege- und dehnsteifer Rahmen durch kompatible Knotenverformungen diese Forderung garantiert erfüllt (die Elemente haben ja nur an den Knoten Kontakt miteinander), muß für das Scheibenproblem durch geeignete

Verschiebungsansätze benachbarter Elemente dafür gesorgt werden, daß Knotenverformungs-Kompatibilität auch zu Kompatibilität (und nicht zum Auseinanderklaffen oder Überlappen) an den Elementrändern führt.

Die Forderungen nach Kompatibilität und Gleichgewicht werden durch den "Kraft-Verformungs-Zusammenhang" (gegeben durch die im folgenden Abschnitt behandelte **Elementsteifigkeitsmatrix**) bzw. die (im Abschnitt 4.5 behandelte) **Systemsteifigkeitsbeziehung** erfüllt.

4.4 Die Elementsteifigkeitsmatrix, Reduktion von Elementlasten

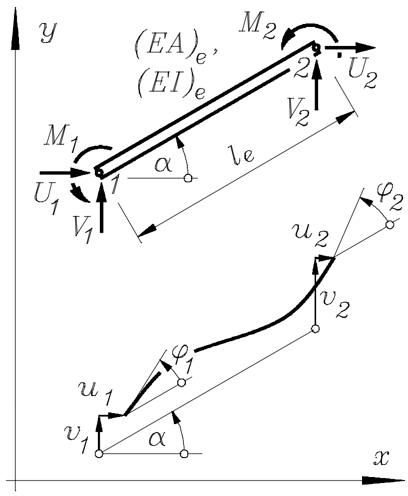
An jedem Knoten eines finiten Elements wird ein **Knotenverschiebungsvektor** definiert, der z. B. für das Rahmenelement aus drei Komponenten (zwei Verschiebungen, Biegewinkel) und für das Scheibenelement aus zwei Komponenten (zwei Verschiebungen) besteht (der Begriff Knotenverschiebungsvektor wird benutzt, obwohl auch - wie beim Rahmenelement - Verdrehungen enthalten sein können, weil der auch übliche Begriff "Knotenverformungsvektor" auf andere Art irreführend ist, denn der "abmessungslose" Knoten kann sich ja nicht "verformen"). Die Anzahl der Komponenten im Knotenverschiebungsvektor wird als **Anzahl der Freiheitsgrade** des Knotens bezeichnet.

Analog dazu wird für jeden Elementknoten ein **Knotenkraftvektor** definiert, der die gleiche Anzahl von Komponenten wie der Knotenverschiebungsvektor hat und z. B. für das ebene Rahmenelement zwei Kraftkomponenten und ein Moment, für das ebene Scheibenelement zwei Kraftkomponenten enthält. Dies sind die im vorigen Abschnitt besprochenen **inneren Kräfte (bzw. Momente)**, die erst durch das Trennen von Elementen und Knoten sichtbar werden.

Die Skizze zeigt diese Definitionen für das ebene Rahmenelement (man beachte die gleichgerichteten Definitionen an beiden Elementknoten für Kräfte, Momente, Verschiebungen und Biegewinkel). Die Knotenverschiebungsvektoren aller Elementknoten werden zum **Elementverschiebungsvektor**, die Knotenkräfte zum **Elementkraftvektor** zusammengefaßt:

$$\bar{v}_e = \begin{bmatrix} \bar{v}_{e1} \\ -- \\ \bar{v}_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ -- \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} , \qquad \bar{f}_e = \begin{bmatrix} \bar{f}_{e1} \\ -- \\ \bar{f}_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ -- \\ U_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} .$$

Elementverschiebungsvektor Elementkraftvektor



Elementkraftvektor und **Elementverschiebungsvektor** werden durch die **Elementsteifigkeitsmatrix** verknüpft. Die mit diesen Größen zu definierende **Elementsteifigkeitsbeziehung** muß nach den Regeln der Technischen Mechanik

- ♦ allen Gleichgewichtsbedingungen genügen, die mit den Größen des Elementkraftvektors am Element aufgeschrieben werden können,
- ♦ den Kraft-Verformungszusammenhang unter Einbeziehung der Elementabmessungen und -materialeigenschaften im Rahmen der Näherungsannahmen einer bestimmten Theorie erfüllen.

Für das betrachtete ebene Rahmenelement müssen also z. B. die Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 &= 0 \quad , \\ V_1 + V_2 &= 0 \quad , \\ (U_2 \sin\alpha - V_2 \cos\alpha)\, l_e - M_1 - M_2 &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt werden. Hinsichtlich der Kraft-Verformungs-Beziehungen gelingt es, die "klassische" Theorie der elastischen Verformung von Stab und Biegeträger komplett nachzubilden (Längsdehnung nach dem Hookeschen Gesetz, Biegeverformungen nach der Bernoullischen Theorie). Die Herleitung findet sich ausführlich in "Dankert/Dankert: Technische Mechanik, computerunterstützt" im Abschnitt 18.2 und führt zu folgendem Ergebnis:

$$\bar{f}_e = \begin{bmatrix} \bar{f}_{e1} \\ \bar{f}_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \bar{K}_{12}^T & \bar{K}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{v}_{e1} \\ \bar{v}_{e2} \end{bmatrix} = \bar{K}_e \, \bar{v}_e \quad .$$

mit den Untermatrizen

$$\bar{K}_{11} = \left(\frac{EI}{l^3}\right)_e \begin{bmatrix} 12 s^2 + \beta c^2 & (\beta - 12)\, s c & -6 l_e s \\ & 12 c^2 + \beta s^2 & 6 l_e c \\ (symm.) & & 4 l_e^2 \end{bmatrix} ,$$

$$\bar{K}_{12} = \left(\frac{EI}{l^3}\right)_e \begin{bmatrix} -(12 s^2 + \beta c^2) & -(\beta - 12)\, s c & -6 l_e s \\ -(\beta - 12)\, s c & -(12 c^2 + \beta s^2) & 6 l_e c \\ 6 l_e s & -6 l_e c & 2 l_e^2 \end{bmatrix} ,$$

$$\bar{K}_{22} = \left(\frac{EI}{l^3}\right)_e \begin{bmatrix} 12 s^2 + \beta c^2 & (\beta - 12)\, s c & 6 l_e s \\ & 12 c^2 + \beta s^2 & -6 l_e c \\ (symm.) & & 4 l_e^2 \end{bmatrix}$$

und den Abkürzungen

$$c = \cos\alpha \quad , \quad s = \sin\alpha \quad , \quad \beta = \frac{A\, l_e^2}{I} \quad .$$

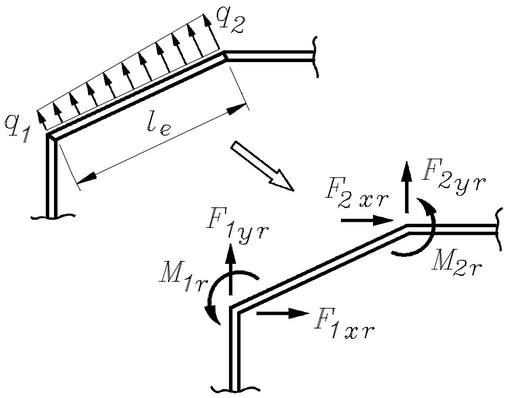
Die Elementsteifigkeitsmatrix ist symmetrisch (es gilt der Satz von Maxwell und Betti, vgl. z. B. "Dankert/Dankert: Technische Mechanik, computerunterstützt", Seite 408). Sie verknüpft die Elementknotenverschiebungen mit den Elementknotenkräften in der aufgeschriebenen Form

$$\bar{f}_e = \bar{K}_e \bar{v}_e$$

natürlich nur dann, wenn das Element nur durch die Elementknotenkräfte belastet ist und selbst keine äußere Belastung trägt.

Im Abschnitt 4.2 wurde bereits darauf hingewiesen, daß äußere Belastungen, die auf ein Element wirken, so auf (äußere) Knotenlasten reduziert werden können, daß die zu berechnenden Verschiebungen aller Elementknoten dadurch nicht verfälscht werden. Im Abschnitt 18.2.2 in "Dankert/Dankert: Technische Mechanik, computerunterstützt" wird gezeigt, daß für linear veränderliche Linienlasten (Trapezlasten) diese Forderung erfüllt wird, wenn folgende Reduktion vorgenommen wird:

$$\bar{f}_{e,red} = \begin{bmatrix} F_{1xr} \\ F_{1yr} \\ M_{1r} \\ F_{2xr} \\ F_{2yr} \\ M_{2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l_e}{20}(7\,q_1 + 3\,q_2)\sin\alpha \\ \frac{l_e}{20}(7\,q_1 + 3\,q_2)\cos\alpha \\ (3\,q_1 + 2\,q_2)\,l_e^2/60 \\ -\frac{l_e}{20}(3\,q_1 + 7\,q_2)\sin\alpha \\ \frac{l_e}{20}(3\,q_1 + 7\,q_2)\cos\alpha \\ -(2\,q_1 + 3\,q_2)\,l_e^2/60 \end{bmatrix}$$



Reduktion der Linienlasten auf Knotenlasten

Die in diesem **Vektor der reduzierten Elementlasten** stehenden Größen werden den äußeren Knotenlasten zugeschlagen, und die im Abschnitt 4.3 behandelte Trennung von inneren Kraftgrößen und äußerer Belastung durch Rundumschnitt um jeden Systemknoten ist möglich. Damit ist dem im folgenden Abschnitt beschriebenen Algorithmus zur Verformungsberechnung der Weg geöffnet.

Wenn nach der Verformungsberechnung die inneren Kräfte (Elementknotenkräfte) auch noch berechnet werden sollen, was natürlich in der Regel gewünscht wird, weil daraus auf die Schnittgrößen geschlossen werden kann, darf dies für die Elemente, für die eine Reduktion von Elementlasten vorgenommen wurde, nicht nach der oben angegebenen einfachen Elementsteifigkeitsbeziehung geschehen, weil natürlich die Elementlasten real vorhanden sind, auch wenn sie mit dem kleinen Trick der Reduktion auf äquivalente Knotenlasten (für die Verformungsberechnung) vorübergehend von den Elementen verschwunden sind.

In den Abschnitten 15.4 und 18.2 in "Dankert/Dankert: Technische Mechanik, computerunterstützt" wird gezeigt, daß man zu den tatsächlich wirkenden (inneren) Elementknotenknotenkräften über die **erweiterte Elementsteifigkeitsbeziehung** kommt, die mit dem Vektor der reduzierten Knotenlasten in der Form

$$\bar{f}_e = \bar{K}_e \bar{v}_e - \bar{f}_{e,red}$$

aufgeschrieben werden kann.

> Ein finites Element wird charakterisiert durch
>
> - die Anzahl der zum Element gehörenden Knoten $\boldsymbol{k_e}$,
> - die Anzahl der Freiheitsgrade der einzelnen Knoten $\boldsymbol{k_f}$ und die zu den einzelnen Freiheitsgraden gehörenden Verschiebungs- und Kraftgrößen (Knotenverschiebungs- und Knotenkraftvektor),
> - die Elementsteifigkeitsmatrix, die den Elementverschiebungsvektor mit dem Elementkraftvektor verknüpft,
> - eine Vorschrift, wie Elementlasten auf Knotenlasten reduziert werden (Berechnung des Vektors der reduzierten Elementlasten).

Für das in diesem Abschnitt bisher exemplarisch behandelte ebene Rahmenelement gilt: $\boldsymbol{k_e = 2}$ Elementknoten mit je $\boldsymbol{k_f = 3}$ Freiheitsgraden (zwei Verschiebungskomponenten und der Biegewinkel bzw. zwei Kraftkomponenten und ein Moment) führen auf eine Elementsteifigkeitmatrix mit $\boldsymbol{k_e \cdot k_f = 6}$ Zeilen und Spalten, für die Reduktion von Elementlasten gilt ein Vektor der reduzierten Elementlasten mit **6** Komponenten.

Für das Scheibenelement, das in den vorigen Abschnitten bereits betrachtet wurde, gilt: $\boldsymbol{k_e = 6}$ Elementknoten mit je $\boldsymbol{k_f = 2}$ Freiheitsgraden (zwei Verschiebungskomponenten bzw. zwei Kraftkomponenten) führen auf eine Elementsteifigkeitsmatrix mit $\boldsymbol{k_e \cdot k_f = 12}$ Zeilen und Spalten, für die Reduktion von Elementlasten gilt ein Vektor der reduzierten Elementlasten mit **12** Komponenten.

Genau diese Größen sind die Voraussetzungen für die Behandlung einer bestimmten Problemklasse. Die Stärke der Finite-Elemente-Methode liegt auch ganz wesentlich darin begründet, daß der weitere (im folgenden Abschnitt behandelte) Algorithmus unabhängig vom Elementtyp ist und nur Bezug auf die oben angegebenen Informationen nehmen muß, die das finite Element charakterisieren.

Natürlich ist das Bereitstellen der Elementsteifigkeitsmatrix und des Vektors der reduzierten Elementlasten nicht immer ganz einfach, die Möglichkeit der Bereitstellung fertiger Formeln, wie sie für das ebene Rahmenelement angegeben werden können, ist eher die Ausnahme. Für das in den vorigen Abschnitten vorgestellte Scheibenelement kann nur ein Algorithmus definiert werden, nach dem die einzelnen Elemente von Elementsteifigkeitsmatrix und Vektor der reduzierten Elementlasten berechnet werden können. Aber diese Vorarbeit muß einmal geleistet werden (z. B. vor dem Schreiben eines Computerprogramms, nicht von dem Benutzer des Programms).

Was der Anwender von Finite-Elemente-Computerprogrammen unbedingt wissen sollte, sind die Eigenschaften der verwendeten finiten Elemente und die Näherungsannahmen, die bei der Herleitung der Elementsteifigkeitsbeziehung getroffen wurden. Für das ebene Rahmenelement wurden bereits die Voraussetzungen genannt: Im Rahmen der klassischen Theorie liefert das Element exakte Ergebnisse. Wenn das Scheibenelement mit 6 Knoten verwendet wird, sollte man (bei allem Vertrauen auf die "Vorarbeiter" und die Richtigkeit des verwendeten Computerprogramms) mindestens folgendes wissen:

Der Verschiebungszustand innerhalb des Elements muß genähert werden. Für die beiden Verschiebungskomponenten ***u*** und ***v*** müssen zwei Funktionen angesetzt werden, die beim ebenen Problem von zwei Koordinaten abhängen. Üblicherweise werden algebraische Funktionen benutzt, bei 12 Freiheitsgraden können 12 Terme verwendet werden, da keine Koordinatenrichtung bevorzugt werden soll, also 6 Terme für jede Verschiebungskomponente. In kartesischen Koordinaten könnte also ein Verschiebungsansatz der Form

$$u(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 x y + a_5 y^2 \quad ,$$
$$v(x,y) = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 x y + b_5 y^2$$

verwendet werden.

Die sich daraus ergebenden Konsequenzen müssen dem Programmbenutzer klar sein. Es braucht ihn weniger zu interessieren, daß wahrscheinlich keine kartesischen Koordinaten für die Ansatzfunktionen verwendet wurden (ganz bestimt nicht, wenn das Element gekrümmte Ränder hat) und wie die Koordinatentransformationen mit den von ihm einzugebenden Knotenkoordinaten ausgeführt werden. Daß für die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix numerisch integriert werden muß (üblicherweise werden die Gauß-Formeln dafür verwendet), ist für den Benutzer nur beiläufig von Interesse, weil dadurch eine (allerdings meist unbedeutende) Fehlerquelle gegeben ist. Auch die Implementierungsprobleme sind natürlich Sache des Programmierers.

Die Konsequenzen aus dem verwendeten Verschiebungsansatz sind: Wenn die Verschiebungen im Element sich nach einer quadratischen Funktion ändern, können sich die Verzerrungen und die zu ihnen (nach dem Hookeschen Gesetz) proportionalen Spannungen im Element nach einer linearen Funktion ändern. Das ist natürlich wesentlich besser als bei dem im Abschnitt 4.1 skizzierten Scheibenelement SD6 (mit konstanten Spannungen im Element), aber auch nicht mehr, als z. B. nach der Bernoullischen Biegetheorie als Änderung über die Querschnittshöhe angenommen wird. Für höhere Genauigkeitsforderung (und die Behandlung der gedrungenen Konsole, die im vorigen Abschnitt besprochen wurde, als Kragträger nach der Biegetheorie wäre z. B. sicher eine sehr grobe Näherungsannahme) ist also auch bei Verwendung des Elements SD12 eine ausreichend feine Vernetzung erforderlich, um die komplizierteren Spannungsverläufe elementweise durch lineare Verläufe brauchbar anzunähern. Ganz besonders muß in der Nähe örtlicher Spannungsspitzen (z. B. in der Nähe von Kerben) ganz besonders fein vernetzt werden.

Für das Verständnis des im folgenden Abschnitt beschriebenen Algorithmus zur Berechnung der Knotenverformungen ist hinsichtlich der verwendeten finiten Elemente nur folgendes festzuhalten:

- Die (symmetrischen) Elementsteifigkeitsmatrizen verknüpfen alle Elementknotenverschiebungen mit den Elementknotenkräften. Man teilt sie zweckmäßig horizontal und vertikal in jeweils $\boldsymbol{k_e}$ Blöcke ein, die so entstehenden Submatrizen verknüpfen jeweils alle Verschiebungen eines Knotens mit den Kräften an diesem oder einem anderen Elementknoten, es entstehen z. B. für die Elementsteifigkeitsmatrix des ebenen Rahmenelements 4 Submatrizen mit je $\boldsymbol{k_f = 3}$ Zeilen bzw. Spalten:

$$\bar{f}_e = \begin{bmatrix} \bar{f}_{e1} \\ \bar{f}_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \bar{K}_{12}^T & \bar{K}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{v}_{e1} \\ \bar{v}_{e2} \end{bmatrix} = \bar{K}_e \, \bar{v}_e \quad .$$

Für das Scheibenelement SD12 würde die Elementsteifigkeitsbeziehung folgendermaßen aufgeschrieben werden können (Submatrizen haben $\boldsymbol{k_f = 2}$ Zeilen bzw. Spalten):

$$\bar{f}_e = \begin{bmatrix} \bar{f}_{e1} \\ \bar{f}_{e2} \\ \bar{f}_{e3} \\ \bar{f}_{e4} \\ \bar{f}_{e5} \\ \bar{f}_{e6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \bar{K}_{13} & \bar{K}_{14} & \bar{K}_{15} & \bar{K}_{16} \\ & \bar{K}_{22} & \bar{K}_{23} & \bar{K}_{24} & \bar{K}_{25} & \bar{K}_{26} \\ & & \bar{K}_{33} & \bar{K}_{34} & \bar{K}_{35} & \bar{K}_{36} \\ & & & \bar{K}_{44} & \bar{K}_{45} & \bar{K}_{46} \\ & symm. & & & \bar{K}_{55} & \bar{K}_{56} \\ & & & & & \bar{K}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{v}_{e1} \\ \bar{v}_{e2} \\ \bar{v}_{e3} \\ \bar{v}_{e4} \\ \bar{v}_{e5} \\ \bar{v}_{e6} \end{bmatrix} = \bar{K}_e \, \bar{v}_e \quad .$$

Eine Submatrix $\boldsymbol{\bar{K}_{ij}}$ verknüpft also die Verschiebungen am Knoten $\boldsymbol{j}$ mit den Kräften am Knoten $\boldsymbol{i}$.

♦ Auf entsprechende Weise wird der Vektor der reduzierten Elementlasten knotenweise unterteilt. Für das ebene Rahmenelement stehen dann in

$$\bar{f}_{e,red} = \begin{bmatrix} \bar{f}_{1r} \\ \bar{f}_{2r} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{k_e = 2}$ Vektoren $\boldsymbol{\bar{f}_{ir}}$ mit je $\boldsymbol{k_f = 3}$ Komponenten. Für das Scheibenelement SD12 stehen in

$$\bar{f}_{e,red} = \begin{bmatrix} \bar{f}_{1r} \\ \bar{f}_{2r} \\ \bar{f}_{3r} \\ \bar{f}_{4r} \\ \bar{f}_{5r} \\ \bar{f}_{6r} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{k_e = 6}$ Vektoren $\boldsymbol{\bar{f}_{ir}}$ mit je $\boldsymbol{k_f = 2}$ Komponenten.

Im folgenden wird vorausgesetzt, daß ein Algorithmus bekannt ist, nach dem für ein bestimmtes finites Element die Elementsteifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K_e}$ und der Vektor der reduzierten Elementlasten $\boldsymbol{f_{e,red}}$ ermittelt werden können.