4.5 Systemsteifigkeitsbeziehung, Berechnung der Knotenverschiebungen

Die weitere Beschreibung des Finite-Elemente-Algorithmus nimmt stets Bezug auf seine Realisierung in einem Computerprogramm. Deshalb werden zunächst die typischen Informationen erläutert, die in der Datenstruktur des rechnerinternen Berechnungsmodells enthalten sein müssen.

4.5.1 Rechnerinternes Modell

Das rechnerinterne Modell für eine Festigkeitsberechnung nach der Finite-Elemente-Methode muß folgende Informationen enthalten (die angegebenen Beispiele beziehen sich auf die Darstellung dieser Informationen im Finite-Elemente-"Baukasten" FEMSET):

- Die **Geometrie** wird definiert durch die Angabe der Koordinaten aller n_k Knoten des Systems, bezogen auf ein beliebiges (vom Benutzer zu definierendes) Koordinatensystem, z. B. gespeichert in einer Matrix mit n_k Zeilen und maximal 3 Spalten.
- Die **äußeren Knotenlasten** (das sind diskrete Lasten wie Einzelkräfte und Einzelmomente, keine verteilte Belastung wie Linien-, Flächen- oder Volumenlasten) werden den Knoten zugeordnet. Für jeden Knoten können maximal k_f Knotenlasten definiert werden (k_f ist die Anzahl der Freiheitsgrade der Knoten), die z. B. in einer Matrix mit n_k Zeilen und k_f Spalten zusammengestellt werden.
- Die **geometrischen Randbedingungen** werden auch auf die Knoten bezogen. Im einfachsten Fall kann jeder Freiheitsgrad eines Knotens behindert sein, was durch einen Vektor mit n_k Indikatoren für den "Lagertyp" festgelegt werden kann. Es sind jedoch auch Besonderheiten wie "Verschiebungsmöglichkeit oder -behinderung nur in vorgegebener Richtung" oder "Gleichheit von Verschiebungskomponenten" denkbar, wofür die Information in jeweils speziell angepaßten Feldern gespeichert werden muß.
- In einer Matrix der **Element-Informationen** können alle Parameter zusammengefaßt werden, die zum Aufbau der Elementsteifigkeitsmatrix und für die Reduktion von Elementlasten auf Knotenlasten erforderlich sind. Da die Elementabmessungen im allgemeinen aus den Koordinaten der zum Element gehörenden Knoten entnommen werden können, müssen nur die Materialkennwerte (Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl, ...), Querschnittswerte (Fläche, Flächenträgheitsmomente, ...) und Elementbelastungen (Linien-, Flächen- oder Volumenlasten, Temperaturbelastung, ...) z. B. in einer Matrix mit n_e Zeilen (n_e ist die Anzahl der Elemente des Systems) und einer Spaltenanzahl abhängig vom Informationsbedarf für die Elemente zusammengestellt werden.
- Die **Topologie** (welche Knoten gehören zu welchem Element?) wird üblicherweise durch eine **Koinzidenzmatrix** festgelegt, die in n_e Zeilen jeweils die k_e Knotennummern für ein Element enthalten.

Für das bereits im Abschnitt 4.1 skizzierte Problem eines ebenen biege- und dehnsteifen Rahmentragwerks werden nachfolgend sämtliche Informationen zusammengestellt, die das rechnerinterne Modell im Finite-Elemente-Baukasten FEMSET beschreiben:

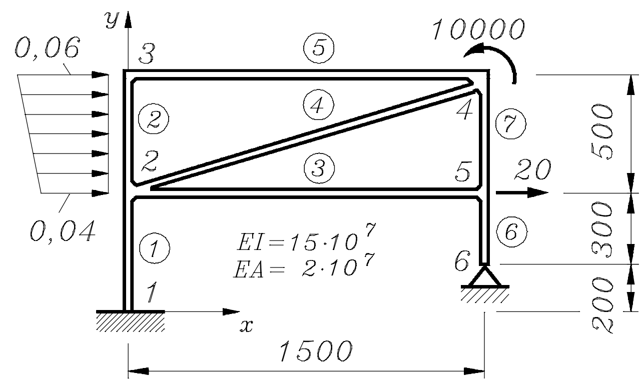
Die Knotenkoordinaten beziehen sich auf das (willkürlich) in den Punkt links unten gelegte Koordinatensystems.

Drei Knotenlasten pro Knoten werden in der Reihenfolge "Horizontalkraft, Vertikalkraft, Moment" in jeweils einer Matrixzeile gespeichert (positive Kräfte in Richtung der gewählten Koordinaten, positive Momente entgegen dem Uhrzeigersinn).

Die Information über die Knotenlagerung wird in FEMSET für jeden Knoten durch eine maximal k_f-stellige Zahl verschlüsselt. Jede Ziffer ungleich 0 kennzeichnet einen behinderten Freiheitsgrad (1 - Horizontalverschiebung, 2 - Vertikalverschiebung, 3 - Biegewinkel, deshalb: 123 - starre Einspannung, 12 - Festlager, 1 - Loslager, das Horizontalverschiebung verhindert, 2 - Loslager, das Vertikalverschiebung verhindert).

Für jedes Element werden 4 Werte in der Matrix der Elementparameter gespeichert: Biegesteifigkeit, Dehnsteifigkeit und die Linienlastintensitäten an den Elementknoten 1 und 2 (der Elementknoten 1 ist derjenige, der in der Koinzidenzmatrix in der ersten Spalte steht).

Die Reihenfolge der Eintragung der beiden Knotennummern für ein Element in die Koinzidenzmatrix ist für ein Element mit nur zwei Knoten frei wählbar, in FEMSET korrespondiert die Reihenfolge dann allerdings mit den Linienlasten: Wenn man vom Elementknoten 1 zum Elementknoten 2 "wandert", zeigen die Pfeilspitzen positiver Linienlasten nach links.



Anzahl der Elemente: $n_e = 7$
Anzahl der Knoten: $n_k = 6$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 500 \\ 0 & 1000 \\ 1500 & 1000 \\ 1500 & 500 \\ 1500 & 200 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 \\ 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 123 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Knotenkoordinaten Knotenlasten Lager

$$\begin{array}{cccc} & & & \\ \begin{bmatrix} 150000000 & 20000000 & 0 & 0 \\ 150000000 & 20000000 & 0{,}06 & 0{,}04 \\ 150000000 & 20000000 & 0 & 0 \\ 150000000 & 20000000 & 0 & 0 \\ 150000000 & 20000000 & 0 & 0 \\ 150000000 & 20000000 & 0 & 0 \\ 150000000 & 20000000 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

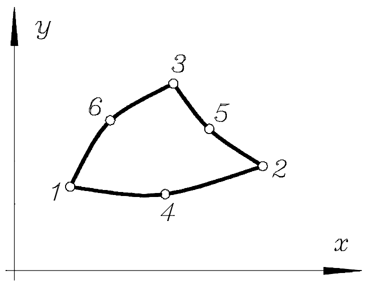
EI EA q_1 q_2
Elementparameter

Koinzidenzmatrix

Für Elemente mit mehr als zwei Knoten muß die Reihenfolge der Knotennummern in der Koinzidenzmatrix natürlich unbedingt mit der Reihenfolge der Elementknotennumerierung übereinstimmen, die beim Aufschreiben der Elementsteifigkeitsbeziehung gewählt wurde. Dies soll an dem Modell mit dem Scheibenelement SD12, das schon im Abschnitt 4.1 vorgestellt wurde, verdeutlicht werden.

Der Benutzer eines Rechenprogramms muß sich unbedingt über die Reihenfolge, die der Programmentwickler für die Elementknotennumerierung festgelegt hat, informieren. Die

Skizze zeigt eine mögliche Elementknotennumerierung, wie sie bei den theoretischen Vorarbeiten und beim Schreiben des Programms festgelegt worden sein könnte.



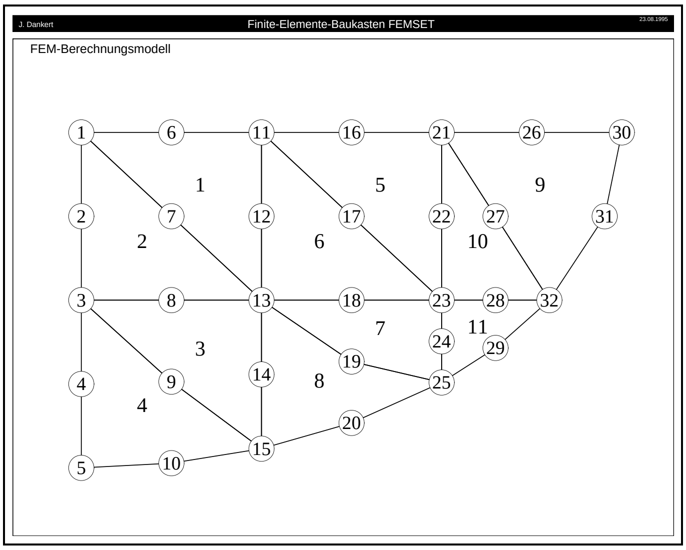
Elementknotennumerierung für das Element SD12

An folgende Vorgaben muß man sich dann beim Aufschreiben der Koinzidenzmatrix halten:

- Die ersten drei Knotennummern müssen Eckknoten definieren, die entgegen dem Uhrzeigersinn angeordnet sind.
- Die Reihenfolge der Seitenmittenknoten muß danach genau der Elementknotenreihenfolge entsprechen, die vierte Knotennummer muß also unbedingt den zwischen den Elementknoten 1 und 2 liegenden Knoten bezeichnen usw.

Das folgende Beispiel zeigt die Knoten- und Elementnumerierung für das Scheibenproblem und die zugehörige Koinzidenzmatrix, in der die Reihenfolge in jeder Zeile mit der oben gezeigten Elementknotennumerierung korrespondiert:

$$\begin{bmatrix} 1 & 13 & 11 & 7 & 12 & 6 \\ 3 & 13 & 1 & 8 & 7 & 2 \\ 3 & 15 & 13 & 9 & 14 & 8 \\ 5 & 15 & 3 & 10 & 9 & 4 \\ 11 & 23 & 21 & 17 & 22 & 16 \\ 13 & 23 & 11 & 18 & 17 & 12 \\ 13 & 25 & 23 & 19 & 24 & 18 \\ 15 & 25 & 13 & 20 & 19 & 14 \\ 21 & 32 & 30 & 27 & 31 & 26 \\ 23 & 32 & 21 & 28 & 27 & 22 \\ 25 & 32 & 23 & 29 & 28 & 24 \end{bmatrix}$$



Knotennummern (in Kreisen) und Elementnummern

4.5.2 Aufbau der Systemsteifigkeitsbeziehung

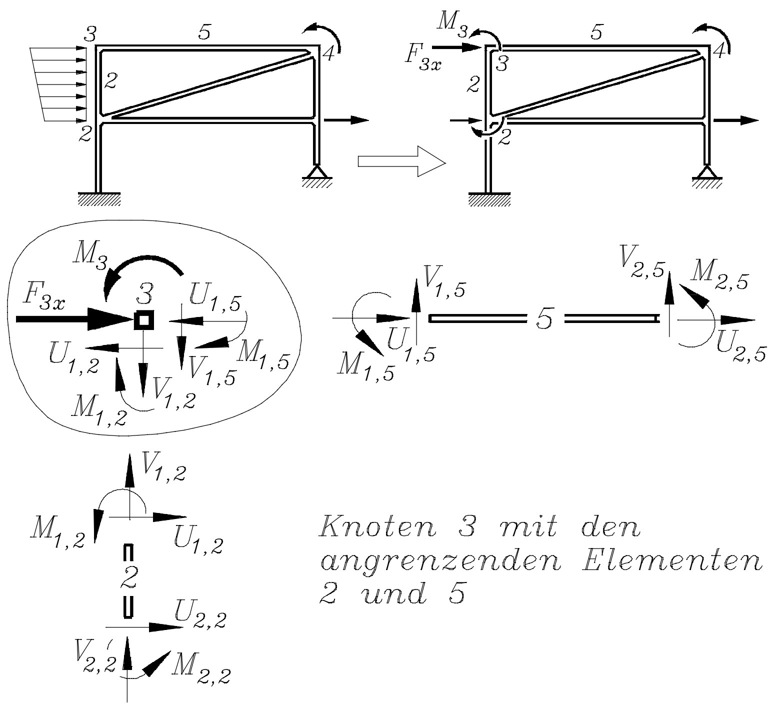
Die **Systemsteifigkeitsbeziehung**

$$\bar{K}\,\bar{v} = \bar{f}$$

verknüpft die im **Systemverschiebungsvektor** $\bar{v}$ zusammengestellten Verschiebungen sämtlicher Knoten des Systems mit den (äußeren) Knotenkräften, die im **Systemkraftvektor** $\bar{f}$ zusammengefaßt sind. $\bar{K}$ ist die **Systemsteifigkeitsmatrix**, die bei einem System mit n_k Knoten und k_f Freiheitsgraden pro Knoten $n = n_k \cdot n_f$ Zeilen bzw. Spalten hat.

Es wird davon ausgegangen, daß für alle $\mathbf{n_e}$ Elemente des Systems ($\boldsymbol{i = 1, \ldots, n_e}$ sei die Elementnummer) die Elementsteifigkeitsbeziehungen

$$\bar{f}_{e,i} = \bar{K}_{e,i}\,\bar{v}_{e,i}$$



bereitstehen. Dann erhält man die Gleichungen der Systemsteifigkeitsbeziehung durch Aufschreiben der Gleichgewichtsbedingungen an den (freigeschnittenen) Knoten, in denen die (inneren) Elementknotenkräfte mit Hilfe der Elementsteifigkeitsbeziehungen durch die Knotenverschiebungen ersetzt werden. Dies soll an einem Knoten des bereits in den vorherigen Abschnitten behandelten ebenen Rahmens demonstriert werden:

Die beiden Elementsteifigkeitsbeziehungen der am Knoten 3 angrenzenden Elemente 2 und 5

$$\bar{f}_{e,2} = \begin{bmatrix} \bar{f}_{e1,2} \\ \bar{f}_{e2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \bar{K}_{12}^T & \bar{K}_{22} \end{bmatrix}_2 \cdot \begin{bmatrix} \bar{v}_{e1,2} \\ \bar{v}_{e2,2} \end{bmatrix} = \bar{K}_{e,2}\,\bar{v}_{e,2} \quad ,$$

$$\bar{f}_{e,5} = \begin{bmatrix} \bar{f}_{e1,5} \\ \bar{f}_{e2,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \bar{K}_{12}^T & \bar{K}_{22} \end{bmatrix}_5 \cdot \begin{bmatrix} \bar{v}_{e1,5} \\ \bar{v}_{e2,5} \end{bmatrix} = \bar{K}_{e,5}\,\bar{v}_{e,5}$$

werden knotenweise aufgeschrieben:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{e1,2} &= \bar{K}_{11,2}\,\bar{v}_{e1,2} + \bar{K}_{12,2}\,\bar{v}_{e2,2} \quad , \\ \bar{f}_{e2,2} &= \bar{K}_{12,2}^T\,\bar{v}_{e1,2} + \bar{K}_{22,2}\,\bar{v}_{e2,2} \quad , \\ \bar{f}_{e1,5} &= \bar{K}_{11,5}\,\bar{v}_{e1,5} + \bar{K}_{12,5}\,\bar{v}_{e2,5} \quad , \\ \bar{f}_{e2,5} &= \bar{K}_{12,5}^T\,\bar{v}_{e1,5} + \bar{K}_{22,5}\,\bar{v}_{e2,5} \end{aligned}$$

(der zusätzliche Index nach dem Komma ist jeweils die Elementnummer, für die die Beziehung gilt).

Am Knoten 3 greifen nach der Reduktion der Linienlast die äußere Kraft $\boldsymbol{F}_{3x}$ und das äußere Moment $\boldsymbol{M}_3$ an (zu berechnen nach den im Abschnitt 4.4 angegebenen Formeln). Nach dem Freischneiden des Knotens werden die (inneren) Elementknotenkräfte der beiden angrenzenden Elemente sichtbar. Am Knoten 3 müssen die drei Gleichgewichtsbedingungen

$$
\begin{aligned}
U_{1,2} + U_{1,5} &= F_{3x} \quad , \\
V_{1,2} + V_{1,5} &= 0 \quad , \\
M_{1,2} + M_{1,5} &= M_3
\end{aligned}
$$

erfüllt werden. Sie werden zur Vektorgleichung

$$\bar{f}_{e1,2} + \bar{f}_{e1,5} = \bar{f}_3$$

zusammengefaßt (der erste Index bei den Elementknotenkräften bezieht sich auf den Elementknoten 1 oder 2, der zweite Index ist die Elementnummer). Die beiden Vektoren der Elementknotenkräfte werden ersetzt:

$$\bar{\bar{K}}_{11,2}\,\bar{v}_{e1,2} + \bar{\bar{K}}_{12,2}\,\bar{v}_{e2,2} + \bar{\bar{K}}_{11,5}\,\bar{v}_{e1,5} + \bar{\bar{K}}_{12,5}\,\bar{v}_{e2,5} = \bar{f}_3 \quad .$$

Die Verschiebungen in dieser Gleichung wurden noch mit den Elementknotenbezeichnungen (Indizes 1 bzw. 2 vor dem Komma für die jeweiligen Elementknoten 1 und 2) formuliert. Diese werden nun durch die Systemknotennummern ersetzt. Mit der im Abschnitt 4.5.1 angegebenen Knotennumerierung gilt:

$$
\begin{aligned}
\bar{v}_{e1,2} = \bar{v}_{e1,5} &= \bar{v}_3 \quad , \\
\bar{v}_{e2,2} &= \bar{v}_2 \quad , \\
\bar{v}_{e2,5} &= \bar{v}_4
\end{aligned}
$$

(man beachte, daß die Koinzidenzmatrix für dieses Beispiel im Abschnitt 4.5.1 so aufgeschrieben wurde, daß die Elementknoten 1 der beiden Elemente 2 und 5 jeweils mit dem Systemknoten 3 zusammenfallen). Das Gleichsetzen der Elementknotenverschiebungen mit den Systemknotenverschiebungen garantiert die Kompatibilität des verformten Systems. Damit erhält man die Gleichgewichtsbedingungen für den Systemknoten 3 in der Form

$$\bar{\bar{K}}_{12,2}\,\bar{v}_2 + (\bar{\bar{K}}_{11,2} + \bar{\bar{K}}_{11,5})\,\bar{v}_3 + \bar{\bar{K}}_{12,5}\,\bar{v}_4 = \bar{f}_3 \quad .$$

Die Vektorgleichung repräsentiert drei Gleichungen der Systemsteifigkeitsbeziehung, die (bei 6 Knoten) aus insgesamt 18 Gleichungen besteht. Die drei Gleichungen, die die Forderungen nach Gleichgewicht und Kompatibilität am Knoten 3 erfüllen, werden in der Systemsteifigkeitsmatrix durch die Submatrizen aus den angrenzenden Elementen auf folgenden Positionen realisiert:

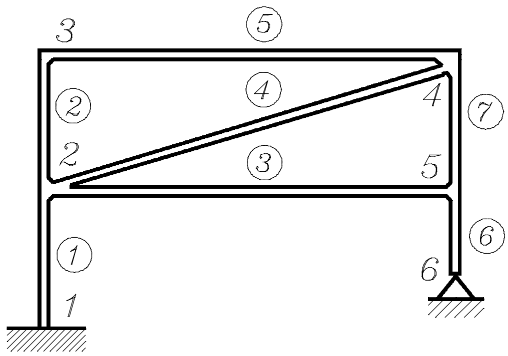
$$
\begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\bar{\bar{0}} & \bar{\bar{K}}_{12,2} & \bar{\bar{K}}_{11,2} + \bar{\bar{K}}_{11,5} & \bar{\bar{K}}_{12,5} & \bar{\bar{0}} & \bar{\bar{0}} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \\ \bar{v}_4 \\ \bar{v}_5 \\ \bar{v}_6 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \\ \bar{f}_4 \\ \bar{f}_5 \\ \bar{f}_6 \end{bmatrix}
\quad .
$$

Nach dem gleichen Algorithmus werden die übrigen Gleichungen formuliert. Es ist offensichtlich, daß dabei jede Submatrix aller Elementsteifigkeitsmatrizen genau einmal in die

Systemsteifigkeitsmatrix eingespeichert wird. Sie gelangen dabei genau auf die Positionen, die der Abbildung der Elementknotennumerierung auf die Systemknotennumerierung entspricht. Diese Abbildung wird durch die Koinzidenzmatrix vorgegeben.

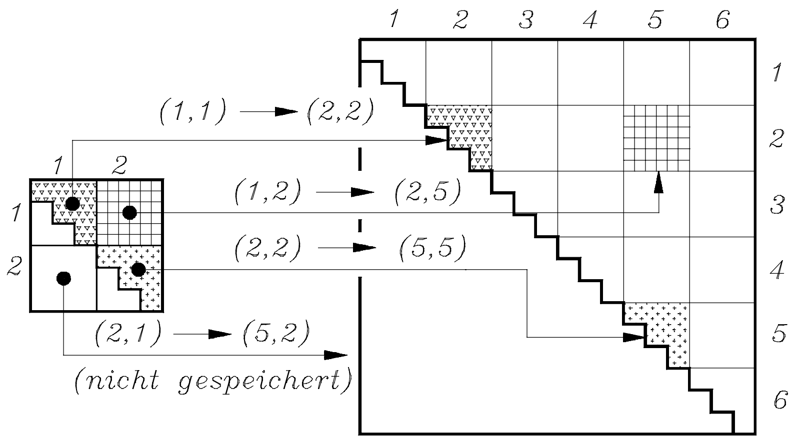
Nachfolgend ist die für das bereits im Abschnitt 4.5.1 betrachtete Beispiel verwendete Numerierung mit der zugehörigen Koinzidenzmatrix noch einmal dargestellt:

	Element-knoten 1	Element-knoten 2
Element 1	**2**	**1**
Element 2	**3**	**2**
Element 3	**2**	**5**
Element 4	**2**	**4**
Element 5	**3**	**4**
Element 6	**5**	**6**
Element 7	**4**	**5**



Systemknoten- und Systemelementnumerierung, <--- zugehörige Koinzidenzmatrix

Die Submatrizen der Elementsteifigkeitsmatrix des Elements 3 landen also in der Systemsteifigkeitsmatrix auf den Positionen (2,2), (2,5), (5,2) und (5,5), weil den Elementknotennummern 1 und 2 für dieses Element in der Koinzidenzmatrix die Systemknotennummern 2 und 5 zugewiesen werden (nebenstehende Skizze). Dabei kann man auf das Einspeichern in das linke untere Dreieck der Systemsteifigkeitsmatrix verzichten, weil diese wie alle Elementsteifigkeitsmatrizen symmetrisch ist.



Einspeichern der Elementsteifigkeitsmatrix des Elements 5 in die Systemsteifigkeitsmatrix

Wenn auf den Positionen in der Systemsteifigkeitsmatrix bereits Submatrizen von anderen Elementen stehen, werden die zusätzlichen Submatrizen addiert, wie dies am Beispiel der Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen für den Knoten 3 demonstriert wurde.

In einem Computer-Programm wird dies z. B. folgendermaßen realisiert:

- ♦ Die Systemsteifigkeitsmatrix wird auf allen Positionen "mit Nullen initialisiert".
- ♦ In einer Schleife über alle Elemente wird jeweils eine Elementsteifigkeitsmatrix aufgebaut und danach sofort in die Systemsteifigkeitsmatrix (durch "Aufaddieren")

eingespeichert. Dabei wird der Aufbau des Systembelastungsvektors (aus reduzierten Elementlasten und diskreten Knotenlasten) gleich miterledigt.

Die weitaus meisten Finite-Elemente-Programmsysteme realisieren diese Strategie des "elementweisen Aufbaus" der Systemsteifigkeitsbeziehung, einige FEM-Programme (z. B. das ziemlich weit verbreitete ANSYS) arbeiten mit einer ganz speziellen Strategie zur Lösung des entstehenden linearen Gleichungssystems und bauen die Systemsteifigkeitsbeziehung knotenweise auf.

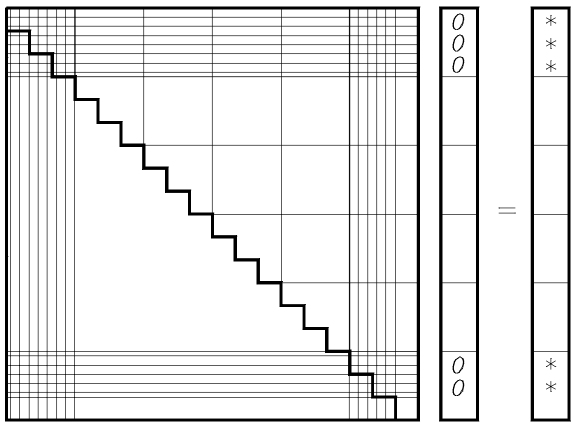
Man beachte den außerordentlich hohen Formalisierungsgrad, der sich in der Vorschrift zum Aufbau der Systemsteifigkeitsbeziehung ausdrückt:

Die Forderungen nach **Gleichgewicht** (für jeden Rundumschnitt um einen Knoten) und **Kompatibilität** (Elemente müssen auch nach der Verformung noch zusammenpassen) werden realisiert durch einen formalen Umspeicherungsprozeß, der der Programmierung in hohem Maße entgegenkommt.

Die Systemsteifigkeitsbeziehung

$$\bar{\mathbb{K}}\ \bar{v} = \bar{f}$$

für das betrachtete Beispiel ist ein lineares Gleichungssystem mit 18 Gleichungen und 18 Unbekannten, die allerdings auf die beiden Vektoren $\bar{\boldsymbol{v}}$ und $\bar{\boldsymbol{f}}$ verteilt sind:



Die nebenstehende Skizze deutet die 5 bekannten Nullverschiebungen (an den Knoten 1 und 6) im Systemverschiebungsvektor $\bar{\boldsymbol{v}}$ an, genau für diese 5 Freiheitsgrade stehen im Systembelastungsvektor $\bar{\boldsymbol{f}}$ (angedeutet durch *****) die unbekannten Lagerreaktionen.

Bei der Multiplikation

$$\bar{\mathbb{K}}\ \bar{v}$$

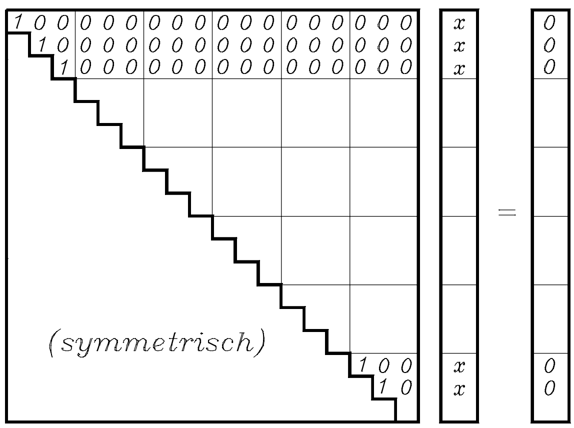
haben die durch vertikale Schraffur kenntlich gemachten Spalten der Systemsteifigkeitsmatrix $\bar{\boldsymbol{K}}$ wegen der Nullelemente in $\bar{\boldsymbol{v}}$ keinen Einfluß. Sie können aus der Matrix entfernt werden, wenn gleichzeitig die Nullelemente aus dem Vektor $\bar{\boldsymbol{v}}$ entfernt werden. Da die unbekannten Lagerreaktionen jeweils nur in einer Gleichung vorkommen, können diese 5 Gleichungen (durch horizontale Schraffur angedeutet) aus dem Gleichungssystem zunächst herausgelöst werden, ohne daß das Gleichgewicht zwischen Gleichungsanzahl und Anzahl der Unbekannten gestört wird.

Nach dem Ausführen dieser beiden Operationen bleibt ein Gleichungssystem mit 13 Gleichungen übrig. Die auf das Format 13*13 "geschrumpfte" Systemsteifigkeitsmatrix hat ihre Symmetrieeigenschaft erhalten, weil immer paarweise Zeilen und zugehörige Spalten gestrichen werden, und alle Unbekannten dieses Systems sind im Systemverschiebungsvektor enthalten, während die "rechte Seite" des Gleichungssystems nur die bekannten Kräfte enthält. Die unbekannten Knotenverschiebungen können berechnet werden.

Nach der Lösung des Gleichungssystems können bei Bedarf die "gestrichenen" 5 Gleichungen benutzt werden, um (bei nun bekannten Knotenverschiebungen) die unbekannten Lagerreaktionen zu ermitteln.

> Bemerkenswert ist auch hier der hohe Formalisierungsgrad:
>
> Die **geometrischen Randbedingungen** (behinderte Verschiebungen) werden realisiert, indem in der Systemsteifigkeitsmatrix Zeilen und Spalten gestrichen werden.

Dieser Prozeß wird in den meisten Computer-Programmen zur Finite-Elemente-Methode leicht modifiziert. Der angenehme Effekt, daß sich beim Einbau der geometrischen Randbedingungen die Gleichungsanzahl reduziert (je höher der Grad der statischen Unbestimmtheit, desto mehr verringert sich die Gleichungsanzahl), müßte mit einem ziemlich aufwendigen Umspeicherungsprozeß bezahlt werden, weil die sehr großen Systemsteifigkeitsmatrizen im Regelfall nur extern gespeichert werden können und die gesamte Matrix "umgeräumt" werden muß. Deshalb verzichtet man auf die Reduktion der Gleichungsanzahl und modifiziert die betroffenen Gleichungen so, daß sie automatisch bei der Lösung des Gleichungssystems für die gelagerten Knoten Nullverschiebungen liefern:



- ♦ Die nebenstehende Skizze zeigt eine Möglichkeit. Eine **1** auf der Hauptdiagonalen und das Nullsetzen aller übrigen Elemente der Matrixzeile und des entsprechenden Elements im Vektor der rechten Seite garantieren, daß die zugehörige Unbekannte (in der Skizze angedeutet durch ***x***) bei der Lösung des Gleichungssystem den Wert **0** erhält.
- ♦ Die am wenigsten aufwendige Methode realisiert Null-Verschiebungen, indem das Hauptdiagonalelement der betreffenden Gleichung durch einen außerordentlich großen (ansonsten aber beliebigen) Wert ersetzt wird. Es ergibt sich näherungsweise der gleiche Effekt wie bei dem oben beschriebenen Verfahren, wenn alle übrigen Elemente der Matrixzeile und das Vektorelement auf der rechten Seite gegenüber dem "Riesenwert" vernachlässigbar klein sind.

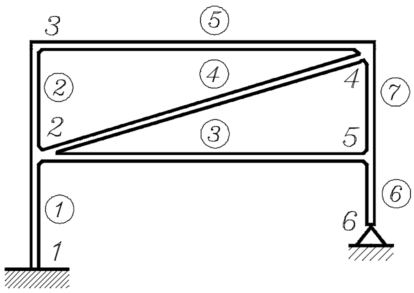
Wenn die unbekannten Lagerreaktionen berechnet werden sollen, sind die auf die beschriebene Weise modifizierten Gleichungen vorab zu sichern.

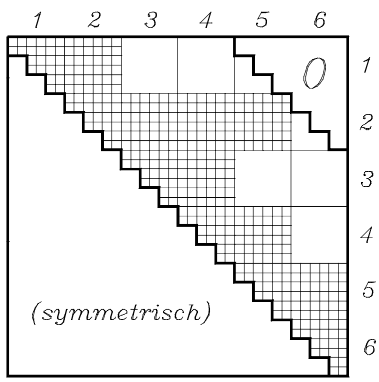
4.5.3 Lösung des linearen Gleichungssystems, Bandweitenproblem

Die Lösung des linearen Gleichungssystems ist sowohl hinsichtlich des erforderlichen Aufwands als auch aus numerischer Sicht die kritische Stelle des Finite-Elemente-Algorithmus, wenn praxisnahe komplizierte (und damit auf sehr große Gleichungssysteme führende) Probleme behandelt werden. Glücklicherweise hat das Gleichungssystem eigentlich alle angenehmen Eigenschaften, die es aus der Sicht der numerischen Mathematik haben kann:

- Die Koeffizientenmatrix ist im Regelfall symmetrisch (bei elastostatischen Problemen wird dies durch den Satz von Maxwell/Betti garantiert) und positiv definit. Bevorzugt wird neben dem Gauß-Algorithmus (unter Ausnutzung der Symmetrie) für die Lösung des Gleichungssystems das Verfahren von Cholesky, das nur für positiv definite Matrizen im Reellen ausführbar ist und damit die Systemsteifigkeitsmatrix einem außerordentlich effektiven Test unterwirft.
- In Abhängigkeit von der Systemknotennumerierung kann die Systemsteifigkeitsmatrix eine ausgeprägte Bandstruktur aufweisen. Da die Bandweite quadratisch den erforderlichen Aufwand beeinflußt, werden große Systeme vielfach erst durch die Ausnutzung der Bandstruktur der Matrix einer Berechnung mit vertretbaren Rechenzeiten zugängig (nicht betrachtet wird hier die alternative Möglichkeit, die Gleichungen knotenpunktweise aufzubauen und komplette Gleichungen sofort zu eliminieren, bei dieser sogenannten "Frontal Solution Method" wird der Aufwand von der Elementnumerierung wesentlich beeinflußt).

Die (an und für sich vom Benutzer völlig frei wählbare) Systemknotennumerierung, die allein die Bandweite der Systemsteifigkeitsmatrix und damit die erforderliche Rechenzeit für die Lösung des Gleichungssystems wesentlich beeinflußt, soll hier noch diskutiert werden. Die Skizze zeigt die Belegung der Systemsteifigkeitsmatrix für das im vorigen Abschnitt behandelte Beispiel.





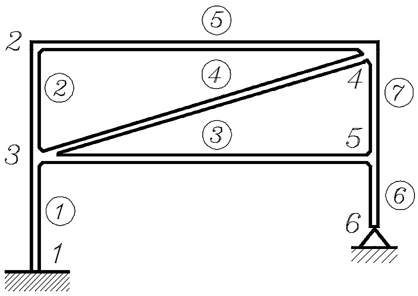
Das am weitesten von der Hauptdiagonalen entfernte von Null verschiedene Matrixelement bestimmt die Bandweite. Die Submatrix (2,5) ist in diesem Fall für die Bandweite verantwortlich, und es wird deutlich, wie die Bandweite von der Systemknotennumerierung abhängt: Eine große Knotennummerndifferenz plaziert die Submatrizen weit entfernt von der Hauptdiagonalen und führt zu einer großen Bandweite. Bei (3*3)-Submatrizen erfordert eine Knotennummerndifferenz **5 − 2 = 3** am Element 3 die 12 Matrixelemente (Bandweite) in der Matrixzeile 4 (dies ist die erste Zeile im zweiten horizontalen Block). Allgemein gilt für die Berechnung der

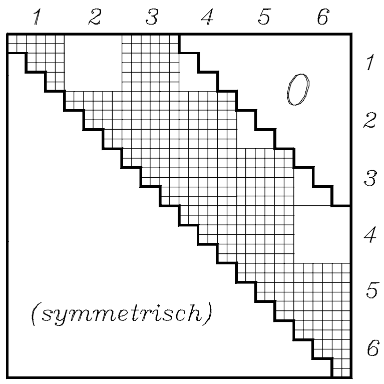
$$\textbf{Bandweite:} \qquad bw = (d_{max} + 1) \cdot k_f \, ,$$

wobei d_{max} die maximale Knotennummerndifferenz ist, die an einem Element des Systems auftritt, k_f ist die Anzahl der Freiheitsgrade pro Knoten (die Formel setzt voraus, daß alle Knoten des Systems die gleiche Anzahl von Freiheitsgraden haben). Damit ist auch klar, wie die Bandweite minimiert werden kann:

> Die Knoten des Systems sollten so numeriert werden, daß die größte an einem Element auftretende Knotennummerndifferenz d_{max} möglichst klein wird.
>
> Da die von d_{max} abhängige Bandweite den Aufwand für die Lösung des Gleichungssystems quadratisch beeinflußt, ist ein gewisser Aufwand zur Bandweitenminimierung bei umfangreicheren Problemen in jedem Fall gerechtfertigt.

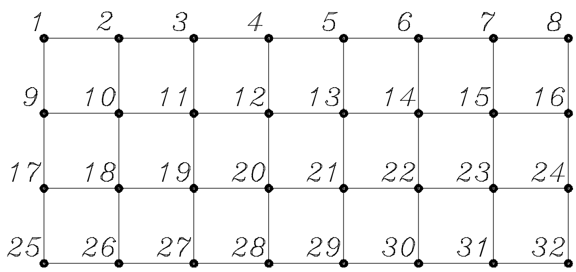
Für das betrachtete Beispiel kann allein durch Vertauschen der Knotennummern **2** und **3** die Bandweite von **12** auf **9** reduziert werden (vgl. nebenstehende Skizze). Damit ist das mögliche Minimum erreicht.





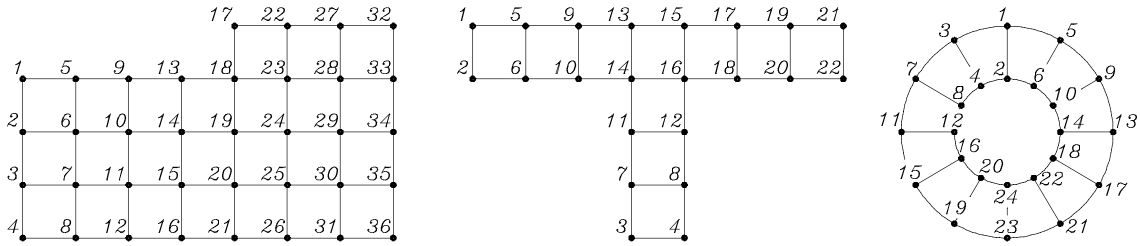
Die so einfach zu formulierende Aufgabe, die Knotennummern auf optimale Weise auf die Knoten zu legen, ist nicht ganz einfach lösbar, obwohl natürlich der Algorithmus bekannt ist, der diese Numerierung erzeugen könnte: Ein Rechenprogramm müßte alle n_k**!** Permutationen nach der idealen Numerierung durchsuchen. Das ist schon bei Systemen mittlerer Größe unmöglich.

Alle größeren FEM-Programmsysteme enthalten Algorithmen zur Bandweitenminimierung, die meist auf (zum Teil recht raffinierten) Strategien der sukzessiven Knotennummernvertauschung basieren. Die Garantie, tatsächlich das möglichen Minimum zu liefern, bietet kein Algorithmus, zum Teil versagen sie bei sehr einfach erscheinenden Aufgaben, wenn ein relatives Minimum erreicht ist, bei dem sich durch Vertauschen weiterer Knotennummern zunächst immer ein schlechterer Wert ergeben würde.



Die nebenstehende Skizze zeigt ein solches Beispiel mit 21 ebenen 4-Knoten-Elementen: Die 32 Knoten sind so numeriert, daß sich die Differenz d_{max} **= 9** bei jeder Vertauschung von Knotennummern vergrößern würde. Natürlich ist dies trotzdem nicht die kleinste zu erreichende Knotennummerndifferenz. Wenn man das Rechteck konsequent vertikal (über die kürzere Seite) numerieren würde, ergäbe sich d_{max} **= 5**.

Ein solches Beispiel könnte man als Test für die Leistungsfähigkeit eines Bandweiten-Optimierungs-Algorithmus verwenden, besser ist es, wenn der Programm-Benutzer selbst auf eine geeignete Knotennumerierung achtet, was in den meisten Fällen nicht schwierig ist. Die nachfolgende Skizze zeigt einige Beispiele für ebene Probleme (entnommen aus "Dankert: Numerische Methoden der Mechanik"):

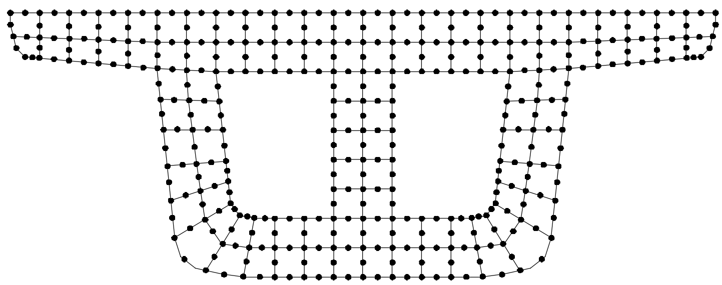


d_{max} **= 6** d_{max} **= 5** d_{max} **= 5**

Optimale Numerierungen

Rechtecke und rechteckähnliche Strukturen sind immer parallel zur kürzeren Seite zu numerieren. Bei Verzweigungen sollten parallele Zweige abwechselnd mit Knotennummern versorgt werden. Geschlossene Ringe dürfen auf keinen Fall in Umfangsrichtung durchnumeriert werden, weil sonst am Ende die höchste Knotennummer an einem Element auf die Knotennummer **1** trifft.

Für mehrfach zusammenhängende Bereiche (der geschlossene Ring ist das einfachste Beispiel dafür) ist die Suche nach der optimalen Knotennumerierung besonders schwierig. Man versuche z. B., für die nebenstehend skizzierte Struktur aus 102 ebenen 8-Knoten-Elementen eine geeignete Numerierung der 403 Knoten zu finden (eine Variante mit d_{max} **= 29** ist bekannt, ob dies das Minimum ist, kann nicht gesagt werden).



Größere FEM-Programmsysteme bieten eine sogenannte Substrukturtechnik an, mit der man das Bandweitenproblem weitgehend vermeiden kann, indem man die Gesamtstruktur vorab in topologisch einfache Teilstrukturen zerlegt. Komplizierte Probleme sollten ohnehin möglichst mit dieser Strategie in überschaubare Teilprobleme zerlegt werden. Die Substrukturtechnik kann im Rahmen dieser Vorlesung nicht behandelt werden, sie wird z. B. in "Dankert: Numerische Methoden der Mechanik" ausführlich beschrieben.